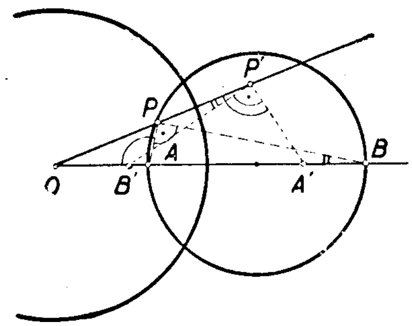
8. *Bizonyítsátok be, hogy az ω-tól nem függ az $OX \cdot OY$ szorzat. Vagyis a 12. ábra*[1] $OA = OB = a$, $AX = BX = AY = BY = b$ *rögzített méretezése mellett az ω még szabadon változtatható, de az $OX \cdot OY$ szorzat csak az a és b-től függ.*

Megoldás: Az O, X és Y egy egyenesre, az ábra szimmetriatengelyére esik. Rajzoljunk A-ból mint középpontból b sugárral kört, és messe ez OA-t C és D pontokban. Akkor az O pontból húzott szelőkre vonatkozó tételből $OX \cdot OY = OC \cdot OD = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, tehát független az ω szögtől. Így az Y pont mindig az X pontnak az O mint középpont körül írt $\sqrt{a^2-b^2}$ sugarú körre vonatkozó inverze (és megfordítva).

9. *Rögzítendő a 13. és 14. ábra*[2] $OA = OB = a$, $AX = BX = AX' = BX' = b$, $QX = r$ *méretezése, az O és Q pont, akkor még az A, B, X, X' pontok mozoghatnak. Bizonyítsátok be, hogy, ha X egy K kört ír le, akkor az X' kört vagy egyenest ír le.*

Megoldás: Az előző feladat jelöléseinek megfelelően X' helyett továbbra is Y-t használunk.

a) Rajzoljunk X-el egy k kört, k ne menjen át O-n. Húzzuk meg az OQ centrálist, messe ez k-t A-ban és B-ben. E pontok tükörképei legyenek A' és B' és k egy tetszésszerinti P pontjáé P'.



$OA'P\triangle \sim OAP\triangle$, mert O-nál lévő szögük közös és az előzőek szerint $OA \cdot OA' = OP \cdot OP'$ $(= a^2 - b^2)$, azaz $\dfrac{OA}{OP} = \dfrac{OP'}{OA'}$.

Ebből következik, hogy

$$A'P'O\sphericalangle = OAP\sphericalangle.$$

Ugyanígy következik $OB'P'\triangle \sim OBP\sphericalangle$ és abból $B'P'O\sphericalangle = OBP\sphericalangle$; végül $BPA\sphericalangle = 90^\circ$ Thales tétele szerint.

Előbbiekből: $A'P'B'\sphericalangle = A'P'O\sphericalangle - B'P'O\sphericalangle = OAP\sphericalangle - OBP\sphericalangle = BPA\sphericalangle = 90^\circ$.

Eredményünk: $A'P'B' = 90^\circ$, tehát P' az $A'B'$ átmérő fölé írt körön van, k tükörképe kör.

b) Ha k keresztülmegy O-n, OQ messe k-t A-ban, A tükörképe legyen A' és k egy tetszésszerinti P pontjának képe P'. Ugyanúgy mint előbb láttuk $OAP\triangle \sim OA'P'\triangle$ tehát $OA'P'\sphericalangle = OPA\sphericalangle = 90^\circ$. Így P' az OA'-re A'-ben emelt merőlegesen helyezkedik el, vagyis k inverze egyenes.

Az előbbiekből az is következik, hogy egy olyan e egyenes képe, mely nem megy át O-n kör. Az O-on átmenő egyenes – mint tudjuk – invariáns egyenes, azaz a tükörképe önmaga, noha a pontok közül csak kettő tükörképe sajátmagának a két metszéspont a tükrözés körével.

*

Megjegyzések: I. Megismerkedtünk a kör és egyenes tükörképével (inverzével). Könnyen meg is tudjuk szerkeszteni ezeket a képeket. Ehhez szükségünk van először is egy tetszésszerinti P pont inverzének a szerkesztésére. Az r sugarú ϱ vezérkör középpontja legyen O. P legyen először ϱ-n kívül. Húzzunk P-ből ϱ-hoz érintőt, az érintési pontot jelöljük E-vel. Az E-ből OP-re bocsátott merőleges és OP metszéspontja legyen P'. A derékszögű háromszögre vonatkozó tételekből $OP \cdot OP' = OE^2 = r^2$. Tehát P' éppen P inverze. Ha P rajta van ϱ-n, akkor önmaga a tükörképe. Ha P a vezérkörön belül helyezkedik el, akkor az előbbi szerkesztést visszafelé csináljuk meg. OP-re P-ben merőlegest állítunk, ez metszi a vezérkört két pontban. E két pontban húzott érintők metszéspontja OP-n lesz, ez a keresett P' pont. Most már meg tudjuk szerkeszteni a körök és egyenesek tükörképeit is.

Ha a tárgykör nem megy át a vezérkör középpontján (inverzió centrumán), akkor három pontjának képe meghatározza az inverz kört; ezt a feladatot egyszerűsíteni lehet két pont tükörképének a szerkesztésére, mert az ábra szimmetrikus az inverzió centrumán és a tárgykör középpontján átmenő egyenesre. Ha a tárgykör átmegy az inverzió centrumán, akkor a képe egyenes, tehát elegendő a kép 2 pontját megszerkeszteni. Ha egyenes képét keressük, megszerkesztjük 2 pontjának képét. Ez a két képpont és az inverzió centruma meghatározzák a keresett kört. Persze ebben az utóbbi két esetben is redukálni lehet a feladatot egy pont képének a szerkesztésére. Az inverzió centrumán átmenő egyenes és a vezérkört derékszögben metsző kör képe sajátmaga.

[1] Lásd e kötet 72. oldalán.

[2] Lásd e kötet 72. oldalán.

II. Van a P inverzének megszerkesztésére egy másik módszer is. Húzzunk P középpontból O-n keresztül kört. Messe ez k-t A és B pontokban. A-ból és B-ből mint középpontokból húzzunk O-n át kört, ezek másik metszése legyen P'. O, P és P' nyilván egy egyenesen feküsznek a szimmetria miatt. $OAP' \triangle \sim OPA \triangle$, mert mind a kettő egyenlőszárú és az O-nál fekvő szög közös. Így $\dfrac{OA}{OP'} = \dfrac{OP}{OA}$; $OA^2 = OP \cdot OP'$ és minthogy $OA = r$, $OP \cdot OP' = r^2$, tehát P' a P inverze.

Ez a szerkesztés azért érdekes, mert pusztán körzővel történik, azonban csak akkor alkalmazható, ha $OP > \dfrac{r}{2}$. Ha $OP \leq \dfrac{r}{2}$ egy kis toldással akkor is végrehajtható a szerkesztés, találjátok ki, hogy hogyan! De meg lehet a kör és egyenes inverz alakzatát is szerkeszteni pusztán körző használatával. Mohr G. dán matematikus „Euklides Danicus” c. munkájában 1672-ben és tőle függetlenül Mascheroni L. olasz matematikus „Geometria del compasso” c. munkájában 1797-ben az inverzió tulajdonságainak felhasználásával kimutatta a következő tételt: *Minden körzővel és vonalzóval elvégezhető szerkesztés csak körzővel is elvégezhető.* Akit érdekel, hogy hogyan, megtalálja Dr. Szőkefalvi Nagy Gyula „A geometriai szerkesztések elmélete”, Dörrie: „Triumph der Mathematik” című könyveiben és sok más helyen.

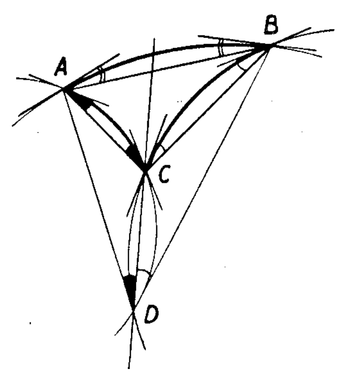
10. *Bizonyítsátok be, hogy ha az X pont szöget ír le, az Y pont vele egyenlő szöget ír le.*

Megoldás: Csak azt kell bizonyítanunk, hogy az inverzió két egyenes hajlásszögét vele egyenlő szöget bezáró két körbe (vagy egy körbe és egy egyenesbe) viszi át. Legyenek az adott egyenesek e_1 és e_2, az inverzió centruma O, e_1 és e_2 inverzei e_1' és e_2'. Ha e_1 és e_2 közül egyik sem megy át az O-n, akkor e_1' és e_2' körök, melyek átmennek O-n. Ha $e_1 \nparallel e_2$, akkor e_1'-nek és e_2'-nek van még egy közös M' pontja, mely e_1 és e_2 M metszésének inverze. e_1'-nek O-ban húzott érintője párhuzamos e_1-gyel, e_2' O-ban húzott érintője pedig e_2-vel, vagyis az O pontban a két kör ugyanakkora szögben metszi egymást, mint a két egyenes szöge. De ekkor az M'-ben húzott érintők is ugyanekkora szöget zárnak be, tehát akkorát, mint a két egyenes. Ha $e_1 \parallel e_2$, akkor e_1'' és e_2'' érintik egymást O-ban.

Ha egyik egyenes, mondjuk e_1 átmegy O-n, akkor e_1-et az inverzió önmagába viszi át. Az előbbihez hasonlóan következik, hogy O-ban ekkor is ugyanakkora szöget zár be e_2' az e_1-gyel, mint e_1 és e_2 szöge. Ha e_1 és e_2 is átmegy O-n, akkor ezeket az inverzió önmagukba viszi át, tehát az állítás ekkor magától értetődő.

11. *Bizonyítsuk be, hogy a kétszer domború, egyszer homorú, ill. a kétszer homorú, egyszer domború körháromszög szögeinek összege nagyobb, ill. kisebb $180°$-nál, ha a háromszöget alkotó körök hatványpontja a körökön kívül van.*

Megoldás: Ha három kör páronként metszi egymást és hatványpontjuk a körökön kívül van, akkor nem lehet semelyik két kör egyik metszéspontja kívül, a másik belül a harmadik körön. Kétszer homorú, egyszer domború háromszögnél tehát esetünkben a domború oldalt szolgáltató kör tartalmazza a másik két kör mindkét metszéspontját. Legyenek a domború oldal végpontjai A és B, a harmadik csúcs C és az ezen átmenő két kör másik metszéspontja D.



Hasonlítsuk össze az ABC körháromszög szögeit az ABC háromszögével. Az A és B csúcsnál az ABC háromszög szögeihez hozzájön még a körháromszögnél az $\widehat{AB}$ ívhez tartozó húr és érintő közti szög, viszont az $\widehat{AC}$, ill. $\widehat{BC}$ ívekhez tartozó húr-érintő szöggel kisebbek e csúcsokban a körháromszög szögei a közönséges háromszögéinél. A körháromszög C-nél fekvő szöge viszont az $\widehat{AC}$ és $\widehat{BC}$ ívekhez tartozó húr-érintő szögekkel kisebb a közönséges háromszög megfelelő szögénél. Így mindegyik húr-érintő szög kétszer fordult elő, mindkétszer ugyanazzal az előjellel. A körháromszög szögeinek összege tehát az $\widehat{AC}$ és $\widehat{BC}$ ívekhez tartozó húr és érintő közti szögek összegének az $\widehat{AB}$ ívhez tartozó húr és érintő közti szögtől való eltérésének kétszeresével „kisebb” a közönséges háromszög szögeinek összegénél, vagyis $180°$-nál. Csak akkor lesz valóban kisebb, ha ez az eltérés pozitív.

Tudjuk, hogy a húr és érintő közti szög megegyezik az ugyanazon ívhez tartozó kerületi szögekkel. Így a homorú oldalt tartalmazó körök D metszéspontját összekötve az A, B, C csúcsokkal $ADC\sphericalangle$ és $CDB\sphericalangle$ az $\widehat{AC}$ és $\widehat{BC}$ ívekhez tartozó húr-érintő szöggel egyenlő. $ADB\sphericalangle$ e két szög összege, mert a CD egyenes, mint a homorú oldalakat szolgáltató körök közös szelője, elválasztja az A és B pontokat, $ADC\sphericalangle$ és $CDB\sphericalangle$ tehát a CD szár különböző oldalán fekszik. Ez az $ADB\sphericalangle$ azonban nagyobb, mint a domború oldalt szolgáltató körben az $\widehat{AB}$ ívhez tartozó kerületi szögek, mert csúcsa e kör belsejében fekszik. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Kétszer domború, egyszer homorú háromszögnél a homorú oldalt szolgáltató körön kívül van a másik két kör mindkét metszéspontja. Ebből kiindulva az előbbiekhez teljesen hasonlóan folytatható ez esetben is a bizonyítás.

12. *Adva van három kör, melynek egy közös pontja van. Szerkesszetek kört, mely a három megadott kört érinti.*

Megoldás: Tekintsük a feladatot megoldottnak, az adott M közös ponttal bíró k_1, k_2, k_3 körök közös érintőkörét megszerkesztettnek.

Ha inverzió centrumnak választjuk M-et, akkor az inverzió k_1, k_2, k_3-at h_1, h_2, h_3 egyenesekbe viszi át és az érintő kört pedig ezen egyenesek érintő körébe.

Megfordítva a szerkesztés úgy történhetik, hogy k_1, k_2, k_3-at a fenti módon tükrözzük egy M közepű körre, megrajzoljuk a képegyenesek közös érintő köreit, majd megszerkesztjük ezen körök inverzét.

Ha k_1-, k_2-, k_3-nak páronként 2 metszéspontja van, akkor h_1, h_2, h_3 egyenesek páronként metszik egymást, de 3 nem megy át egy ponton, 3 ilyen egyenesnek 4 érintőköre van, a feladatnak tehát 4 megoldása van.

Ha 2 kör érinti egymást M-ben, a harmadik metszi őket, akkor a 3 kép-egyenes közül kettő párhuzamos, a harmadik metszi őket, ekkor csak két megoldás van.

Ha mind a három kör érinti egymást M-ben, akkor minden olyan kör megoldás lesz, amelyik átmegy M-en és középpontja a 3 adott kör közös centrálisán van.

13. *Adva, van 3 kör, melyek közül kettőnek van közös pontja. Szerkesszetek kört, mely mindhárom kört érinti.*

Megoldás: k_1, k_2 körök közös pontját válasszuk inverzió centrumának, az inverzió k_1 és k_2-t egyenesbe viszi át, k_3-at körbe, a problémát visszavezettük két egyenes és egy kör közös érintőjének szerkesztésére, amit már meg tudunk oldani.

14. *Tetszőlegesen megadott három körhöz szerkesszetek érintő kört.*

Megoldás: A feladat visszavezethető az egy adott P ponton átmenő és két adott kört érintő kör megszerkesztésére. Oldjuk meg először a feladatot e speciális esetben. Válasszuk P-t inverzió centrumának (vezérkör sugara tetszőleges) és tükrözzük a két adott kört. A tükörképek általában körök, az érintő kör képe azonban mindig egyenes lesz. Így a két kör érintő egyeneseinek inverze szolgáltatja a kívánt megoldásokat.

Ha P mind a két körben benne van vagy mind a kettőn rajta van vagy az egyik kör teljesen bent van a másikban és P mind a kettőn kívül van, akkor nincs megoldás.

Vezessük most vissza az általános esetet e speciálisra. Ha 2 kör érinti egymást és az egyik sugarát növeljük, a másikét ugyanannyival csökkentjük, akkor a körök továbbra is érintkezni fognak. Ezen az úton olyan érintő szerkesztési feladatokban, melyekben körök szerepelnek, egy kört ponttá zsugoríthatunk össze.

Tekintsük a feladatot megoldva. A legkisebb sugarú adott kört (jelöljük a sugarát r_1-gyel) ponttá zsugorítjuk és a többi körök sugarait úgy zsugorítjuk vagy növeljük r_1-gyel, hogy az érintkezés továbbra is megmaradjon. Ezzel a problémát visszavezettük az előbbire: megszerkeszteni a 2 kört érintő és 1 ponton (a harmadik középpontján) átmenő köröket. A megszerkesztett köröket szükség szerint zsugorítva vagy nyújtva kapjuk az eredeti feladat megoldását.

Vizsgáljuk a megoldások számát. Ha k_1-, k_2-, k_3-nak nincs közös pontja, akkor lesz olyan kör, amely mind a hármat kívülről érinti, lesz olyan, amelyik mind a hármat belükről érinti, 3 különböző fog egyet kívülről és kettőt belülről és 3 fog kettőt kívülről és egyet belülről érinteni. Tehát általában nyolc megoldás lehetséges.

Ha két kör benne van egészen a harmadikban, akkor már csak 4 megoldás lehetséges, mert a harmadikat csak belülről érintheti a közös érintőkör.

Attól függően, hogy melyik megoldást keressük, különbözőképpen kell némely kört zsugorítani, némelyiket nyújtani. Az inverzió elvégzése után a két kör közös érintői közül aszerint választjuk a két kört elválasztókat vagy azt a kettőt, amelyeknek egy oldalán fekszik a két kör, amint a keresett érintő körnek különböző oldalán vagy ugyanazon fekszik a két kör.

15. *Fejezzétek ki az x, y pont $x^2+y^2=1$ körre vonatkozó tükörképének (x', y')-nek a koordinátáit az x, y segítségével.*

Megoldás: $OP \cdot OP' = 1$-ből $OP' = \dfrac{1}{OP}$. Az $OA'P$ és OAP háromszögekből (A és A' a P és P' vetülete az X-tengelyen)

$$\frac{x'}{x} = \frac{OP'}{OP} = \frac{1}{OP^2}, \text{ azaz } x' = \frac{x}{OP^2} = \frac{x}{x^2+y^2},$$
$$\text{és } \frac{y'}{y} = \frac{OP'}{OP} = \frac{1}{OP^2}, \text{ azaz } y' = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Ha a kör sugara nem 1, hanem valamely más r szám, akkor a törtek számlálójába még az r^2 szorzó kerül.

16. *Határozzuk meg az ellipszisnek, a hiperbolának a főkörre vonatkozó tükörképét (egyenletét).*

Megoldás: Az $x^2+y^2=a^2$ a körre kell az $\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletekkel jellemzett görbék inverz alakzatát előállítanunk. Ezt megkapjuk, ha x-et és y-t x'-vel és y'-vel fejezzük ki és ezt helyettesítjük az egyenletbe. Mivel az (x,

y) és (x', y') pontok egymásnak kölcsönösen inverzei, az előző feladatban kapott formulákban (x, y)-t és (x', y')-t felcserélhetjük (amiről számítással is meggyőződhetünk):

$$x = \frac{a^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \qquad y = \frac{a^2 y'}{x'^2 + y'^2}.$$

Ezt behelyettesítve:
$\frac{a^2 x'^2}{(x'^2 + y'^2)^2} + \frac{a^4 y'^2}{b^2 (x'^2 y'^2)^2} = 1$, törteket eltávolítva és rendezve:

$$b^2 (x'^2 + y'^2)^2 - a^2 (b^2 x'^2 + a^2 y'^2) = 0.$$

Ugyanazt elvégezve az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolára, kapjuk:

$$b^2 (x'^2 + y'^2)^2 - a^2 (b^2 x'^2 - a^2 y'^2) = 0.$$

17. *A parabola csúcspontja köré írjatok a fókuszon átmenő kört. Tükrözzétek a parabolát erre a körre nézve (egyenletet).*

Megoldás: Az inverzió alapkörének sugara $\frac{p}{2}$. A parabola egyenlete $y^2 = 2px$. Ennek inverz alakzata az előbbihez hasonlóan

$$8x'(x'^2 + y'^2) - py'^2 = 0.$$