Hatványközepek közti egyenlőtlenségekkel foglalkozva láttuk, hogy a mértani közép elválasztja a pozitív és negatív kitevős hatványközepeket. Bizonyításainkat túlzott bonyodalmak elkerülésére csak racionális kitevőkre korlátoztuk. Így megmutattuk, hogy ha r pozitív racionális szám és a_1, a_2, $\ldots$, a_k tetszés szerinti pozitív számok, amelyek közt vannak különbözők, akkor

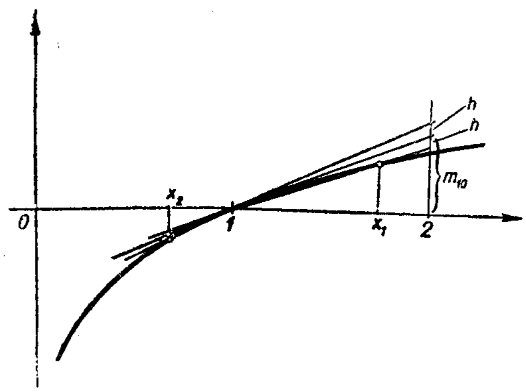
$$\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} < \sqrt[r]{\frac{a_1^r + a_2^r + \ldots + a_k^r}{k}},$$

vagy mindkét oldal 10 alapú logaritmusát véve

$$\frac{1}{k}(\lg a_1 + \lg a_2 + \ldots + \lg a_k) < \frac{1}{r} \lg \frac{a_1^r + a_2^r + \ldots + a_k^r}{k}. \tag{1}$$

Itt a jobboldali logaritmusos kifejezést szeretnénk – esetleg alkalmasan nagyítva is közben a kifejezést – úgy átalakítani, hogy abban az egyes a-k különválasztva szerepeljenek. Nézzük tehát, milyen felső korlátot tudunk találni az $\lg x$ függvény számára.

Rajzoljuk meg az $\lg x$ függvény görbéjét. Miután a görbe alulról konkáv, meghúzva egy érintőt, a görbe mindenütt ez alatt marad. Rajzoljuk meg az $x = 1$ abszcisszájú pontban az érintőt. Jelöljük ennek meredekségét m_{10}-zel. (Meredekségnek nevezzük az egyenes ordinátájának változását, mialatt az abszcissza egy egységnyit változik.)



Ekkor az 1 abszcisszájú ponttól egy tetszésszerinti x pontig az ordináta változása $m_{10}(x-1)$. Mivel az 1 abszcisszához az $\lg 1 = 0$ ordináta tartozik, így az érintő az $m_{10}(x-1)$ függvény képe. Előbbi megállapításunk tehát az algebra nyelvén így írható: ha $x \neq 1$

$$\lg x < m_{10}(x-1). \tag{2}$$

Itt, ha $x > 1$, akkor átoszthatunk $x-1$-gyel, ha pedig $x < 1$, akkor mind két oldal negatív lévén először -1-gyel szorzunk, ellenkezőre változtatva az egyenlőtlenség jelét és aztán $1-x$-szel osztunk. Így azt kapjuk, hogy

$$\frac{\lg x}{x-1} < m_{10}, \quad \text{ha} \quad x > 1 \quad \text{és} \quad \frac{-\lg x}{1-x} = \frac{\lg x}{x-1} > m_{10}, \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1.$$

Ennél az egyenlőtlenségnél többet is mondhatunk: ha elég közel választjuk x-et 1-hez, akkor $\lg x/(x-1)$ értéke tetszésszerint kevéssel fog eltérni m_{10}-től. Pontosabban szólva akármilyen kis pozitív e számot választunk is, ehhez mindig ki tudunk jelölni az $x = 1$ pont körül egy alkalmas kis szakaszt, hogy az ebbe a szakaszba eső x-ekre a szóbanforgó tört e-nél kevesebbel különbözzék m_{10}-től. Rajzoljuk meg ugyanis az $m_{10} - e$ meredekségű egyenest is az (1,0) ponton át. Ez még pontosan egy pontban metszi a görbét a konkávság miatt, mégpedig az (1,0) ponttól jobbra, mert 1-nél kisebb abszcisszákra az egyenest és a görbét elválasztja az érintő. Jelöljük ennek a metszéspontját x_1-gyel, akkor nyilván $1 < x < x_1$-re

$$\lg x > (m_{10} - e)(x-1), \quad \text{vagyis} \quad m_{10} > \frac{\lg x}{x-1} > m_{10} - e.$$

Hasonlóan látható, hogy az $m_{10} + e$ meredekségű $(m_{10}+e)(x-1)$ egyenes egy 0 és 1 közti x_2 abszcisszájú pontban metszi másodszor a görbét. Így ha $(0 <) x_2 < x < 1$,

$$\lg x > (m_{10} + e)(x-1)$$

és mivel $\lg x$ is, $x-1$ is negatív, innen, meg a fönti egyenlőtlenségből

$$m_{10} < \frac{\lg x}{x-1} < m_{10} + e.$$

Így azt kaptuk, hogy ha $x_1 > x > x_2$,

$$m_{10} + e < \frac{\lg x}{x-1} < m_{10} + e, \tag{3}$$

ami valóban ezt jelenti, hogy ebben a szakaszban $\frac{\lg x}{x-1}$ e-nél kevesebbel különbözik m_{10}-től. Ezt rövidebben így is írhatjuk az algebra nyelvén:

$$\left|\frac{\lg x}{x-1} - m_{10}\right| < e.$$

1

A talált egyenlőtlenségeket alkalmazzuk az $x = a^r$ értékre, ahol a egytől különböző pozitív szám, r pedig pozitív racionális szám. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$r \lg a < m_{10}(a^r - 1).$$

Innen, mivel r és m pozitív,

$$\frac{a^r - 1}{r} > \frac{\lg a}{m_{10}}. \tag{4}$$

Másrészt azt is megmutathatjuk, hogy a bal és jobb oldal különbsége tetszésszerint kicsi lesz, ha r-et elég kicsinek választjuk. Ha ezt bebizonyítottuk, abból utolsó állításunk azonnal következik. Láttuk ugyanis, hogy bármilyen pozitív e számhoz megadható olyan $x_1 > x > x_2$ szakasz az 1 pont körül, amelyen belül fennáll a (3) egyenlőtlenség. Még bizonyítandó állításunk éppen azt jelenti, hogy ha $a > 1$, akkor található olyan r pozitív racionális szám, melyre

$$1 < a^r < x_1,$$

ha pedig $0 < a < 1$, akkor található olyan r, amelyre

$$x_2 < a^r < 1.$$

Az így kiválasztott r-re (3) első része szerint

$$m_{10} - e < \frac{r \lg a}{a^r - 1}. \tag{5}$$

Osszunk még $\lg a$-val:

$$\frac{m_{10}}{\lg a} - \frac{e}{\lg a} < \frac{r}{a^r - 1}.$$

Innen először is leolvashatjuk, hogy $\frac{r}{a^r - 1}$ nem lehet túl kicsiny, hiszen e-t tetszésszerint választhatjuk (persze más és más e értékhez más és más r érték lesz megfelelő.) Legyen pl.: $e = \frac{m_{10}}{2}$ akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}\frac{m_{10}}{\lg a} < \frac{r}{e^r - 1}. \tag{5'}$$

Szorozzuk másrészt az (5) egyenlőtlenséget $\frac{a^r - 1}{r\ m_{10}}$-zel, akkor

$$\frac{a^r - 1}{r} - \frac{e}{m_{10}} \cdot \frac{a^r - 1}{r} < \frac{\lg a}{m_{10}},$$

azaz, felhasználva (4)-et és (5′)-t .

$$\frac{\lg a}{m_{10}} < \frac{a^r - 1}{r} < \frac{\lg a}{m_{10}} + \frac{e}{m_{10}} \cdot \frac{a^r - 1}{r} < \frac{\lg a}{m_{10}} + e\frac{2 \lg a}{m_{10}^2},$$

amint r-et elég kicsinynek választjuk.

Itt számunkra csak annyi lényeges, hogy e szorzója egy határozott, az r választásától független mennyiség. Így ha azt akarjuk elérni, hogy $\frac{a^r - 1}{r}$ eltérése $\frac{\lg a}{m_{10}}$-től 1/1000-nél kisebb legyen, akkor először is e-t kell úgy választani, hogy még a $\frac{\lg a}{m_{10}^2}$-szerese is 1/1000 alatt maradjon. Ezután ehhez az e-hez határozunk meg egy olyan $x_1 > x > x_2$ szakaszt, amelyre teljesül a (3) egyenlőtlenség és az $e = \frac{m_{10}}{2}$ -nek megfelelő hasonló egyenlőség is, és végül egy olyan r értéket, melyre $x_1 > a^r > x_2$. Ezzel bizonyítva lesz állításunk, ha még megmutatjuk a következő segédtételt:

ha a pozitív szám és e tetszés szerinti kis pozitív szám, mindig található hozzájuk olyan pozitív, racionálias r szám, melyre

$$1 - e < a^r < 1 + e.$$

[1] Ezzel megoldását adtuk a 376. feladatnak.

A bizonyítás a Bernoulli-egyenlőtlenség alapján történhet, szószerint ugyanúgy, mint ahogyan IV. közleményben $\sqrt[n]{a}$-ra bizonyítottunk egy hasonló tényt (III. évf. 205. old.). Tudjuk, hogy ha $h > -1$, akkor

$$(1+h)^x < 1 + hx, \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1$$
$$\text{és} \quad (1+h)^x > 1 + hx, \quad \text{ha} \quad x > 1, \quad \text{vagy} \quad x < 0.$$

Esetünkben ha $a > 1$, és r számára 1-nél kisebb értéket keresünk csak, akkor az első egyenlőtlenség szerint

$$a^r = [1 + (a-1)]^r < 1 + r(a-1).$$

Válasszuk r-et úgy, hogy az 1-en kívül az $\dfrac{e}{a-1}$ értéknél is kisebb legyen, akkor az így választott r-re

$$1 < a^r < 1 + e.$$

Ha viszont $0 < a < 1$, akkor a második egyenlőtlenséget használjuk fel negatív kitevő esetén:

$$a^r = \left(\frac{1}{a}\right)^{-r} = \left(1 + \frac{1-a}{a}\right)^{-r} > 1 - r\frac{1-a}{a}.$$

Itt, ha a közel van 0-hoz, az r szorzója bármilyen nagy lehet, de minden esetre r-től független érték és így r választható olyan kicsinek, hogy $r\dfrac{1-a}{a} < e$ legyen. Ez esetben az így megválasztott r-re az

$$1 > a^r > 1 - e$$

egyenlőtlenség fog fennállni. Ezzel segédtételünket bebizonyítottuk s így az $\dfrac{a^r-1}{r}$-re vonatkozó állítás bizonyítása is teljes. [2]

Térjünk most vissza a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség kérdésére. Az (1) egyenlőtlenség jobboldala (2) szerint így alakítható:

$$\frac{1}{r}\lg\frac{a_1^r + a_2^r + \ldots + a_k^r}{k} \leq \frac{m_{10}}{r}\left(\frac{a_1^r + a_2^r + \ldots + a_k^r - k}{k}\right).$$

Az éppen bebizonyított tétel szerint tetszés szerinti kicsi pozitív l korláthoz találhatunk olyan r_1 kitevőt, melyre

$$\frac{\lg a_1}{m_{10}} - l < \frac{a_1^{r_1} - 1}{r_1} < \frac{\lg a_1}{m_{10}} + l$$

hasonlóan olyan r_2-t is, melyre

$$\frac{\lg a_2}{m_{10}} - l < \frac{a_2^{r_2} - 1}{r_2} < \frac{\lg a_2}{m_{10}} + l,$$

és így tovább, végül egy olyan r_k-t, melyre

$$\frac{\lg a_k}{m_{10}} - l < \frac{a_k^{r_k} - 1}{r_k} < \frac{\lg a_2}{m_{10}} + l.$$

A kitevők közül a legkisebbet választva r-nek arra mindegyik felírt egyenlőtlenség egyidejűleg teljesül és így erre

$$\frac{\lg a_1 + \lg a_2 + \ldots + \lg a_k}{m_{10}} - kl < \frac{a_1^r - 1}{r} + \frac{a_2^r - 1}{r} +$$
$$+ \ldots + \frac{a_k^r - 1}{r} < \frac{\lg a_1 + \lg a_2 + \ldots + \lg a_k}{m_{10}} + kl. \tag{6}$$

Az (1), (5) és (6) egyenlőtlenségek együtt azt adják, hogy alkalmas elég kis r-re

$$\frac{1}{k}(\lg a_1 + \lg a_2 + \ldots + \lg a_k) < \frac{1}{r}\lg\left(\frac{a_1^r + a_2^r + \ldots + a_k^r}{k}\right) <$$
$$< \frac{1}{k}(\lg a_1 + \lg a_2 + \ldots + \lg a_k) + \frac{l}{m_{10}}.$$

Az r-edik hatványközép tehát legfeljebb l/m_{10}-zel térhet el a mértani középtől. Itt m_{10} egy adott érték (kiszámítható, hogy $m_{10} = 0{,}43429\ldots$) így l/m_{10} is tetszés szerint kicsinek választható. Ha egy megadott h számnál kisebb eltérést

[2] Ezzel megoldását adtuk a 377. feladatnak.

akarunk elérni, akkor l-et m_{10} h-nál is kisebbre kell választanunk; a fenti bizonyítás szerint ehhez is található olyan r, melyre az r-edik hatványközép logaritmusa h-nál kevesebbel múlja felül a mértani közép logaritmusát. [3]

Vizsgáljuk még meg a negatív kitevős hatványközepek kérdését. Tudjuk, hogy

$$\left(\frac{(1/a_1)^r+(1/a_2)^r+\ldots+(1/a_k)^r}{k}\right)^{-\frac{1}{r}} < \sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}.$$

Vegyük mindkét oldal reciprokát, az egyenlőtlenséget ellenkezőre változtatva és alkalmazzuk eredményünket az $1/a_1$, $1/a_2$, …, $1/a_k$ számokra, kapjuk, hogy tetszésszerinti h számhoz találhatunk olyan kitevőt, melyre

$$\lg \sqrt[k]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\ldots\frac{1}{a_k}} < \frac{1}{r}\lg\frac{(1/a_1)^r+(1/a_2)^r+\ldots+(1/a_k)^r}{k} <$$
$$< \lg \sqrt[k]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\ldots\frac{1}{a_k}} + h.$$

Szorozzuk végig az egyenlőtlenséget -1-gyel:

$$\lg \sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k} > \lg\left(\frac{(1/a_1)^r+(1/a_2)^r+\ldots+(1/a^r)^r}{k}\right)^{-\frac{1}{r}} >$$
$$> \lg \sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k} - h$$

vagyis alkalmas kis kitevő esetén a negatív kitevőhöz tartozó hatványközepek logaritmusa is tetszés szerint közel jut a mértani közép logaritmusához. [4]

Ezek alapján joggal tekinthetjük a mértani közepet „nulladik hatványközép”-nek.

[3] Ezzel megoldását adtuk a 378. feladatnak.
[4] Ezzel megoldását adtuk a 379. feladatnak.