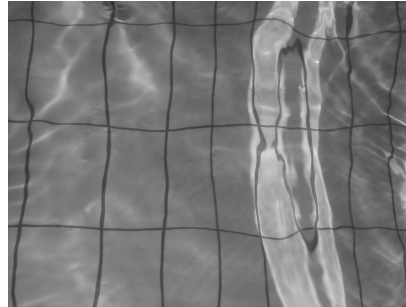
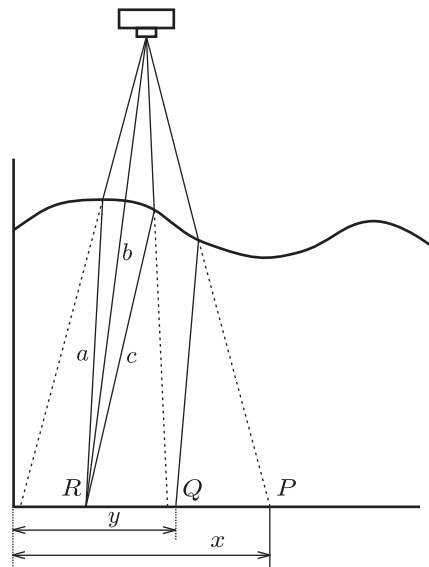


Egy érdekes fénykép látható a KöMaL 2005. évi májusi számának hátsó borítóján. A kép egy uszodában készült, digitális fényképezőgéppel (*Tichy Géza* felvétele). Az 1 méter mély medence fenekén levő csempemintázatot a víz fénytörése eltorzította, hullámossá tette. De vajon hogyan jöhetett létre a kép jobb oldalán látható hosszúkás, *zárt* alakzat az eredeti rácsegyenesekből?



Az uszodákban a víz felszíne szinte mindig hullámos. Az egyszerűség kedvéért tétélezzük fel, hogy a vízfelszín alakja csak az egyik irányban változik számottevően, a másik irányban haladva mindenhol ugyanolyan alakú. Tekintsük egy ilyen víz hullámnak az „érdekes” iránnyal párhuzamos függőleges síkú metszetét (*1. ábra*).



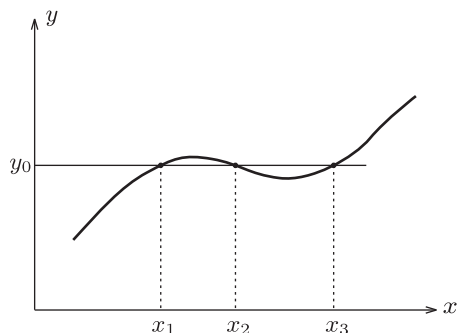
1. ábra

A medence fenekének valamely  $Q$  pontjából kiinduló fénysugarak közül az ér a fényképezőgép objektívjébe, amelynek meghosszabbítása a  $P$  pontban metszené a medence alját jelentő egyenest. Emiatt a fényképen a  $Q$  pont, amely a medence szélétől  $y$  távolságra fekszik, a fényképen a  $P$  pontban, a medence szélétől  $x$  távolságra látszik. Az  $y$  és  $x$  mennyiségek közötti függvénykapcsolatot a vízfelszín pillanatnyi alakja (és a víz törésmutatója) határozza meg.

Érdekes a fénysugarakat a tényleges terjedési irányukkal ellentétesen, a fényképezőgéptől elindulva nyomon követni. (Valamikor régen éppen így képelték el a látás mechanizmusát: a szemből kiinduló „látósugarakkal” próbálták magyarázni a vizuális élmény kialakulását!) Ha a fényképezőgéptől indulva megcélozzuk a  $P$  pontot és követjük a fénysugarat egészen a  $Q$  pontig – vagyis megkeressük az  $x$  helyen látszó tárgy helyét megadó  $y$  távolságot –, nyilván egy egyértelmű (egyértékű, vagyis minden  $x$ -hez egyetlen jól meghatározott értékű  $y$ -t rendelő)

$$y = f(x)$$

függvénykapcsolatot kapunk. Ez a függvény azonban nem feltétlenül monoton, és emiatt általában nem is invertálható. Előfordulhat ugyanis, hogy az  $x$  változó több különböző értékéhez ugyanaz az  $y$  tartozik. Erre példa az *1. ábrán* látható  $R$  pontból kiinduló  $a$ ,  $b$  és  $c$  fénysugarak esete. Az  $y = f(x)$  függvény tehát bizonyos tartományokban több helyen ( $x_1, x_2, x_3$ ) is felveszi ugyanazt az  $y_0$  értéket, jellegét tekintve tehát olyan, mint a *2. ábrán* látható „visszahajló” függvény.



2. ábra

Mivel a kicsit hullámos vízhez tartozó  $f(x)$  függvény monoton növekvő, a 2. ábráról az is leolvasható, hogy az ugyanakkora  $y$ -hoz tartozó  $x$  értékek száma mindig páratlan kell legyen (a szélsőérték-pontoknak megfelelő elfajult esetek  $x_i$  gyökei kétszeresen számítandók).

A medence alján végighúzódnó vonalak különböző pontjai tehát általában 1 helyen, de néha 3 (vagy még több) különböző helyen láthatók. Az, hogy pontosan hányszoros képet látunk, a vízfelszín alakjától függ. A közölt fényképen látható zárt görbe tehát úgy jött létre, hogy valamelyik egyenes vonal (feltehetően a zárt huroktól balra látszó csík) bizonyos része (az a darabja, amely fölött erősebben hullámozott a víz) *megháromszorozódott*. Ahogy távolodunk az erősen hullámos tartománytól, úgy simul ki az  $y = f(x)$  függvény grafikonjának „visszahajló” része, az  $x_i$ -k közül kettő (mondjuk  $x_1$  és  $x_2$ ) közeledni kezd egymáshoz, majd amikor az  $y = y_0$  egyenes  $f(x)$  érintőjévé válik, sőt még azon is túlmegy, akkor a két „főlsleges”  $x_i$  eltűnik és csak a harmadik – immár egyetlen –  $x_3$  marad a fényképen.

Elképzeltető olyan hullámkép is, amelynél az erősebben hullámos tartomány (tehát a vízfelszínnek az a része, ahol az  $x(y)$  inverz függvény „3 értékű”) határaihoz közeledve az egyik oldalon az  $x_1$  és  $x_2$  értékek futnak össze, a másik oldalon viszont  $x_2$  és  $x_3$ . Ebben az esetben a valóságban egyenes vonalnak „szellemképe” nem egy vele összeköttetésben nem álló zárt görbe lesz, hanem megmarad egyetlen folytonos vonalnak, amely azonban erősen eltorzul, S alakban visszahajlik. Elvben az is megvalósulhat, hogy  $f(x)$  5 különböző pontban veszi fel ugyanazt a függvényértéket: ilyenkor az egyenes vonalnak két zárt görbéből álló szellemképe is lesz.

Olvasóink között feltehetően sokan vannak, akik szeretnek fényképezni, s a mai technikai lehetőségek mellett olcsón (a sikertelen próbálkozásokat rögtön kitörölve a gépükből) és remélhetően sikeresen „vadászhatnak” egzotikus optikai jelenségekre.