1. feladat. Szerencsétlenül járt műhold

A mesterséges égitestek manőverezés során leggyakrabban repülésük irányában változtatják meg sebességüket, azaz felgyorsítanak, hogy magasabb pályákra kerüljenek, vagy lefékeznek, hogy visszatérjenek a légkörbe. Ezzel szemben ebben a feladatban most kizárólag olyan pályamódosításokat vizsgálunk, melyeknek során a mesterséges égitest sugár irányú lökéssel módosítja sebességét.

A numerikus eredmények meghatározásához használd a következő értékeket: a Föld sugara $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m, a nehézségi gyorsulás a Föld felszínén $g = 9{,}81$ m/s^2, és a sziderikus nap hosszát tekintsd $T_0 = 24{,}0$ h-nak.

Tekintsünk egy m tömegű távközlési műholdat, mely r_0 sugarú geostacionárius[1] pályán kering pontosan az Egyenlítő egy pontja fölött. A műhold manőverező hajtóművének megfelelő lökéseivel állt a pontos pályára.

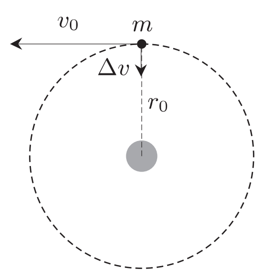
Az egyes részkérdésekre kapható pontszám a feladat sorszáma után zárójelben található.

1. Kérdés. (*a*) (*0,3 pont*) Számold ki r_0 számszerű értékét!

(*b*) (*0,3 + 0,1 pont*) Add meg a műhold v_0 sebességét, mint a g, R_T és r_0 paraméterek függvényét, valamint határozd meg a sebesség számszerű értékét!

(*c*) (*0,4 + 0,4 pont*) Határozd meg a műhold L_0 perdületét (impulzusmomentumát), valamint E_0 teljes mechanikai energiáját, mint a v_0, m, g és R_T paraméterek függvényét!

Amint a műhold elérte a geostacionárius pályát (lásd az *F-1. ábrát*), stabilizálta helyzetét, és munkára kész állapotba került, a földi irányítóközpont hibájának következtében a menőverező hajtómű rövid időre újra bekapcsolódott. A hajtómű a műholdat a Föld irányába lökte meg, és annak ellenére, hogy a földi irányítóközpont szinte azonnal reagált, és kikapcsolta a hajtóművet, a műhold sebessége egy nem kívánt Δv értékkel módosult. A lökést a $\beta = \Delta v / v_0$ lökési paraméterrel jellemezzük. A manőver időtartama jóval rövidebb, mint a műhold keringésének bármilyen más jellemző ideje, tehát a lökés pillanatszerűnek tekinthető.



F-1. ábra

2. Kérdés. Tegyük föl, hogy $\beta < 1$.

2.1. (*0,4 + 0,5 pont*) Határozd meg az új pályát jellemző mennyiségeket[2], azaz a pálya poláris egyenletében szereplő l paramétert (*semi-latus-rectum = „fél-merőleges-távolság”*) és az ε *excentricitást* az r_0 és β paraméterek függvényében!

2.2. (*1,0 pont*) Határozd meg az új pálya főtengelye és a véletlen pályamódosítás helyvektora közti α szöget! (A helyvektor kezdőpontja a Föld középpontja.)

2.3. (*1,0 + 0,2 pont*) Határozd meg a pálya földközeli, illetve földtávoli pontjának $r_{\min}$, illetve $r_{\max}$ távolságát a Föld középpontjától, mint az r_0 és β paraméterek függvényét, valamint add meg a kifejezések számszerű értékét $\beta = 1/4$ esetén!

2.4. (*0,5 + 0,2 pont*) Határozd meg a módosult pálya T keringési idejét, mint a T_0 és β paraméterek függvényét, és add meg a keringési idő számszerű értékét $\beta = 1/4$ esetén!

3. Kérdés.

3.1. (*0,5 pont*) Határozd meg azt a legkisebb β_{esc} lökési paramétert, amely mellett a műhold elhagyja a Föld gravitációs terét!

3.2. (*1,0 pont*) Ebben az esetben határozd meg a műhold pályájának a Földet legjobban megközelítő pontjának $r'_{\min}$ távolságát a Föld középpontjától, mint az r_0 paraméter függvényét!

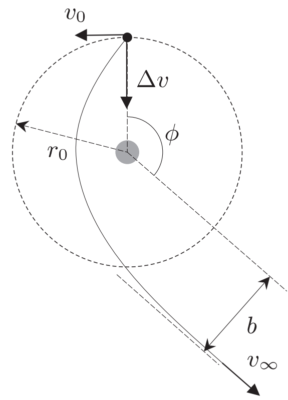
4. Kérdés. Tegyük föl, hogy $\beta > \beta_{\text{esc}}$.

[1] A pályához tartozó keringési idő T_0.

[2] Nézd át a feladat végén található „segítséget”!

4.1. (*1,0 pont*) Határozd meg a v_0 és β paraméterek függvényeként, hogy mekkora v_∞ sebessége marad a műholdnak, ha végtelen messzire eltávolodik a Földtől!

4.2. (*1,0 pont*) Határozd meg a végtelen távoli mozgást jellemző b „impakt paramétert”, mint az r_0 és β paraméter függvényét! (Lásd: *F-2. ábra.*)



F-2. ábra

4.3. (*1,0 + 0,2 pont*) Határozd meg a végtelen távoli mozgás irányának ϕ szögét, mint a β paraméter függvényét! (Lásd: *F-2. ábra.*) Add meg a szög számszerű értékét a $\beta = \frac{3}{2}\beta_{\text{esc}}$ esetre!

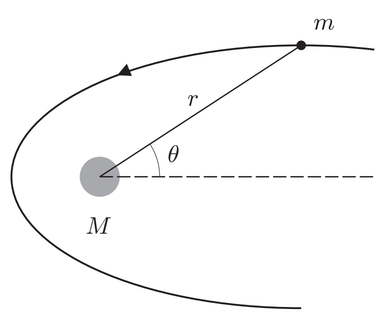
Segítség. A távolság négyzetének reciprokával csökkenő, centrális erőtérben mozgó testek ellipszis, parabola vagy hiperbola pályán mozognak. Az $m \ll M$ közelítés mellett a centrális gravitációs teret létrehozó M tömeg a pálya egyik fókuszában van. A koordináta-rendszer kezdőpontját ebben a pontban felvéve, a fenti pályák általános, polárkoordinátás egyenlete (lásd: *F-3. ábra*)

$$r(\theta) = \frac{l}{1 - \varepsilon \cos\theta}$$

alakú, ahol az l pozitív állandó a görbe *paramétere* (*semi-latus-rectum = fél-merőleges-távolság*), ε pedig a pálya *excentriciása.* A mozgást jellemző megmaradó mennyiségekkel kifejezve:

$$l = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \text{és} \quad \varepsilon = \left(1 + \frac{2\,EL^2}{G^2M^2m^3}\right)^{1/2},$$

ahol G a gravitációs állandó, L a keringő test perdületének (impulzusmomentumának) nagysága a középpontra vonatkoztatva, E pedig a mechanikai energiája. (A potenciális energia zéruspontja a végtelenben van.)



F-3. ábra

A következő három esetet különböztethetjük meg:
i) Ha $0 \leq \varepsilon < 1$, a görbe ellipszis ($\varepsilon = 0$ esetén kör).
ii) Ha $\varepsilon = 1$, a görbe parabola.
iii) Ha $\varepsilon > 1$, a görbe hiperbola.

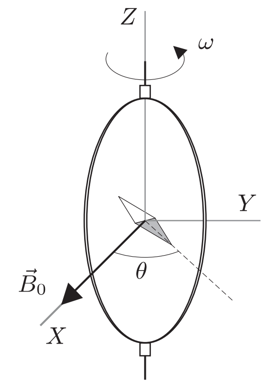
2. feladat. Elektromos mennyiségek abszolút mérése

A XIX. században a technológiai és tudományos fejlődés szükségessé tette, hogy az elektromos mennyiségeknek általánosan elfogadott etalonja legyen. Úgy gondolták, hogy az új abszolút egységek csak a távolság, a tömeg és az idő etalonjaira épülhetnek, melyeket a francia forradalom után hoztak létre. 1861-től 1912-ig intenzív kísérleti munka folyt ezeknek az egységeknek a megalapozására. Itt három tanulmányt mutatunk be.

Az ohm meghatározása (Kelvin). Egy N menetes, a sugarú, R ellenállású kör alakú zárt tekercs állandó ω szögsebességgel forog a függőleges átmérője körül $\vec{B}_0 = B_0\vec{i}$ vízszintes mágneses térben.

1. (*0,5 + 1,0 pont*) Határozd meg a tekercsben indukálódó ε elektromotoros erőt, és a tekercs forgatásához szükséges $\langle P \rangle$ átlagos teljesítményt[3]! A tekercs önindukcióját hanyagold el!

A tekercs középpontjába egy kicsiny mágnestűt helyezünk az *F-1. ábrán* látható módon. A mágnestű lassan szabadon elfordulhat a Z tengely körüli vízszintes síkban, de a tekercs gyors forgását már nem tudja követni.

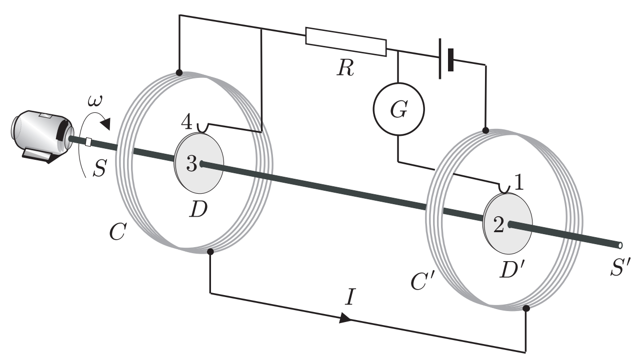


F-1. ábra

2. (*2,0 pont*) Az állandósult állapot elérése után a mágnestű kis θ szöget zár be a $\vec{B}_0$ vektorral. Fejezd ki a tekercs R ellenállását ennek a szögnek és a rendszer többi paraméterének függvényében!

Lord Kelvin ezt a módszert használta az 1860-as években az ohm abszolút egységének rögzítéséhez. A forgó tekercs kiküszöbölésére Lorenz egy alternatív módszert javasolt, melyet Lord Rayleigh és Eleanor Sidgwick használt, és amit a következő részben megvizsgálunk.

Az ohm meghatározása (Rayleigh, Sidgwick). A kísérleti elrendezés az *F-2. ábrán* látható. Az elrendezés két egyforma, b sugarú fémkorongból áll (D és D'), melyek a közös SS' fémtengelyre vannak erősítve. A tengelyt egy motor ω szögsebességgel forgatja. A szögsebességet R méréséhez változtatni lehet. A korongokat két egyforma, a sugarú, N menetes tekercs veszi körül (C és C'). A tekercsek úgy vannak sorbakötve, hogy az I áram a két tekercsen ellentétes irányban folyik keresztül. Az egész berendezés az R ellenállás mérésére szolgál.



F-2. ábra

3. (*2,0 pont*) Tegyük fel, hogy a C és C' tekercseken átfolyó I áram homogén mágneses teret hoz létre a D és D' korongok körül, melynek B nagysága megegyezik a tekercsek középpontjában kialakuló tér nagyságával. Számítsd ki[4] a korongok peremén lévő 1-es és 4-es pont közt keletkező ε indukált elektromotoros erőt! Kihasználhatod, hogy a tekercsek közti távolság sokkal nagyobb a tekercsek sugaránál, és $a \gg b$.

A korongokat az 1-es és a 4-es pontban érintkező kefék kapcsolják a hálózatba. A G galvanométer jelzi az 1–2–3–4 áramkörben folyó áramot.

4. (*0,5 pont*) Az R ellenállást akkor mérjük, amikor G nullát mutat. Fejezd ki R értékét a rendszer fizikai paramétereivel!

---

[3] Egy $X(t)$ periodikus mennyiség $\langle X \rangle$ átlagértéke $\langle X \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T X(t)\,dt$, ahol T a periódusidő.

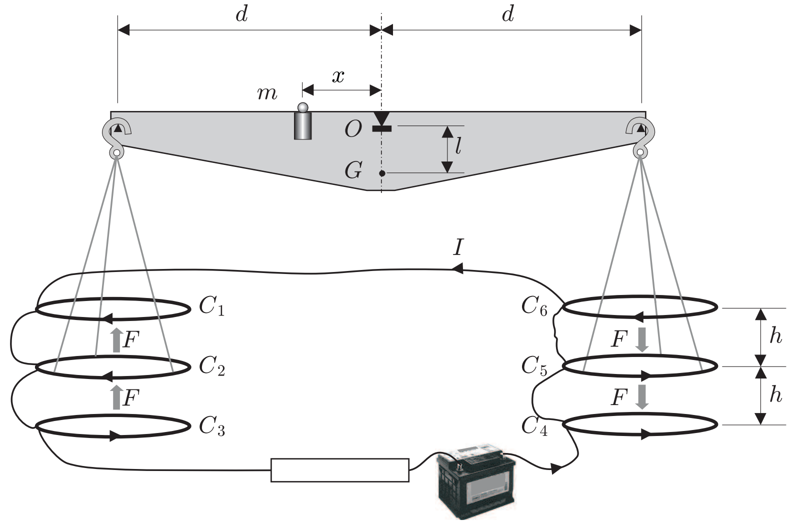
[4] Szükséged lehet a következő integrálokra:

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \int_0^{2\pi} \cos x\,dx = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x\,dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx = \pi,$$

később

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}.$$

Az amper meghatározása. Ha két vezetőn áram folyik át, és megmérjük a köztük fellépő erőt, akkor ez az áram abszolút meghatározását teszi lehetővé. A Lord Kelvin által 1882-ben javasolt „árammérleg” ezt az elvet használja. Az árammérleg hat egyforma, a sugarú, egymenetes, sorbakapcsolt tekercset tartalmaz ($C_1 \ldots C_6$). A rögzített C_1, C_3, C_4 és C_6 tekercsek az *F-3. ábrán* látható módon két, egymástól $2h$ távolságra lévő vízszintes síkban fekszenek. A C_2 és C_5 tekercsek d hosszúságú mérlegkarokra vannak akasztva, és a mérleg egyensúlyi helyzetében egyforma messze vannak a két síktól.



F-3. ábra

Az I áram úgy folyik át a tekercseken, hogy a C_2 tekercsre felfelé, a C_5 tekercsre lefelé mutató mágneses erő hat. Az O forgástengelytől x távolságra elhelyezett m tömeg szolgál arra, hogy a fent leírt egyensúlyi állapotot helyreállítsa abban az esetben, amikor a tekercseken áram folyik át.

5. (*1,0 pont*) Fejezd ki a C_2 tekercsre ható, a C_1 tekerccsel való mágneses kölcsönhatásból származó F erőt! Az egyszerűség kedvéért tételezd fel, hogy az egységnyi hosszra ható erő megegyezik a két végtelen hosszú párhuzamos vezető közt egységnyi hosszon fellépő erővel!

6. (*1,0 pont*) Az I áramot a mérleg egyensúlyi helyzetében mérjük. Fejezd ki I értékét a rendszer fizikai paramétereinek függvényében! A berendezés méretei olyanok, hogy a bal oldalon és a jobb oldalon lévő tekercsek közti kölcsönhatás elhanyagolható.

Legyen M a mérleg tömege (m és a ráakasztott részek nélkül), G a tömegközéppontja, az $\overline{OG}$ távolság pedig l!

7. (*2,0 pont*) A mérleg egyensúlyi állapota stabilis, ha a C_2 tekercs magassága kicsiny δz, a C_5 tekercsé pedig $-\delta z$ értékkel megváltozik. Határozd meg[5] azt a $\delta z_{\max}$ maximális értéket, ahol a mérleg az elengedés után még az egyensúlyi helyzet irányába kezd el mozogni!

3. feladat. Neutronok gravitációs mezőben

A megszokott klasszikus világban a földön rugalmasan pattogó labda a vég nélküli mozgás ideális példája. A labda csapdában van, nem mehet a földfelszín alá és a felső holtpont fölé. Kötött állapotban marad, mindig visszafordul és fölpattan. Csak a közegellenállás és az ütközés rugalmatlansága állíthatja meg, amitől viszont a következőkben eltekintünk.

Fizikusok egy csoportja a grenoble-i Laue–Langevin Intézetben 2002-ben megjelentetett egy cikket[6] a földi gravitációs mezőben végzett neutronejtési kísérletről. A kísérletben a jobbra mozgó neutronok szabadon estek egy vízszintes, neutrontükörként viselkedő kristályfelületre, ahonnan rugalmasan visszapattantak a kezdeti magasságukig, és ez ismétlődött ...

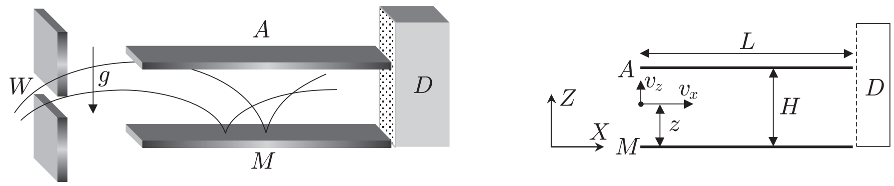
A kísérlet vázlatát az *F-1. ábra* mutatja. A rendszer egy W bemenőnyílásból, egy M neutrontükörből ($z = 0$ magasságban), egy L hosszúságú A neutronelnyelő falból ($z = H$ magasságban) és egy D neutrondetektorból áll. A neutronsugár állandó v_x vízszintes sebességgel repül az A és M közötti üregben W-től D-ig. Mindegyik neutron, amely eléri az A felületet, elnyelődik, azaz eltűnik a kísérletből. Azok, amelyek elérik az M felületet, rugalmasan visszaverődnek. A D detektor azon neutronok $N(H)$ számát méri, amelyek egységnyi idő alatt elérik a detektort.

---

[5] Feltételezd, hogy a tekercsek középpontjai közelítőleg egy vonalban maradnak!

Használd a következő közelítéseket: $\dfrac{1}{1 \pm \beta} \approx 1 \mp \beta + \beta^2$ vagy $\dfrac{1}{1 \pm \beta^2} \approx 1 \mp \beta^2$, ha $\beta \ll 1$, és $\sin\theta \approx \mathrm{tg}\,\theta$, ha θ kicsi.

[6] V. V. Nesvizhevsky et al., „Quantum states of neutrons in the Earth’s gravitational field.” Nature, **415** (2002) 297., Phys Rev. **D 67**, 102002 (2003).



F-1. ábra

Az üregbe belépő neutronok sebességének v_z függőleges komponense mind pozitív, mind negatív irányban széles tartományban változik. Az üregbe belépő neutronok a tükör és az elnyelő felület között repülnek.

1. (*1,5 pont*) Határozd meg klasszikusan a z magasságban belépő neutronok $v_z(z)$ függőleges sebességének azt a tartományát, amelyben a neutron eléri a detektort! Tedd fel, hogy L sokkal hosszabb, mint a feladatban bármely más hosszúság!

2. (*1,5 pont*) Számold ki klasszikusan az üreg L_c minimális hosszát, amely biztosítja, hogy az előző pontban szereplő sebességtartományon kívüli neutronok minden z esetén elnyelődjenek A-ban! Legyen $v_x = 10\ \mathrm{ms}^{-1}$ és $H = 50\ \mu$m.

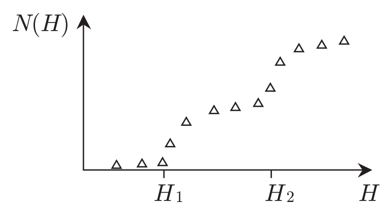
Az $N(H)$ átmenő neutronfluxust mérjük D-ben. Azt várjuk, hogy ez a mennyiség monoton növekszik H-val.

3. (*2,5 pont*) Határozd meg klasszikusan a detektort időegységenként elérő összes neutron $N_c(H)$ számát, feltéve, hogy a belépő neutronnyalábban minden v_z sebesség és minden z magasság egyformán valószínű. A választ az üregbe egységnyi idő alatt, egységnyi v_z függőleges sebességtartományban és egységnyi z magasságtartományban belépő neutronok számát megadó ϱ állandóval fejezd ki!

A grenoble-i csoport által kapott eredmények nem egyeztek a fenti klasszikus jóslattal, helyette $N(H)$ kísérleti értékei hirtelen ugrásokat mutattak, amikor H bizonyos kritikus értékeket $(H_1, H_2, \ldots)$ átlépett. Ezt mutatja vázlatosan az *F-2. ábra.* Más szavakkal, a kísérlet azt mutatta, hogy a neutron függőleges pattogó mozgása kvantált. Hasonlóan ahhoz, ahogy Bohr és Sommerfeld a hidrogénatom energiaszintjeit megkapta, itt is úgy fogalmazhatunk, hogy „az S hatás a h Planck-állandó egész számszorosa”. Ebben a feladatban S-et az

$$S = \int p_z(z)\, dz = nh, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

összefüggés határozza meg (Bohr–Sommerfeld kvantumfeltétel), ahol p_z az impulzus függőleges komponense, és az integrált a pattogás teljes periódusára kell elvégezni. Csak olyan neutronok haladhatnak az üregben, melyek a feltételt kielégítő S-sel rendelkeznek.



F-2. ábra

4. (*2,5 pont*) Számold ki azokat a H_n holtpontmagasságokat és E_n energiaszinteket (ahol E_n a függőleges mozgáshoz tartozó mechanikai energia), amelyeket a Bohr–Sommerfeld kvantálás megenged! Add meg H_1 számszerű értékét μm-ben és E_1 értékét eV-ban!

A kvantálással a hosszú üregen keresztülrepülő neutronok belépéskor egyenletes eloszlása megváltozik, és ezért detektáltak lépcsőszerű eloszlást (lásd az *F-2. ábrát.*) A továbbiakban az egyszerűség kedvéért egy $H < H_2$ magasságú, hosszú üreget vizsgálunk. Klasszikusan minden, az 1. kérdésben meghatározott energiatartományban levő neutron keresztülmehet az üregen, de a kvantummechanika szerint csak azok, melyek energiája E_1. Az energiára és időre vonatkozó Heisenberg-féle határozatlansági reláció szerint ez az energiaérték meghatároz egy minimális repülési időt.

5. (*2,0 pont*) Becsüld meg a minimális t_q repülési időt és az üregnek ehhez tartozó minimális L_q hosszát, amely ahhoz szükséges, hogy meg tudjuk figyelni a neutronok D-ben mért számában az első éles növekedést. Legyen $v_x = 10\ \mathrm{ms}^{-1}$.

Adatok:	Planck-állandó	$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Js,
	fénysebesség vákuumban	$c = 3{,}00 \cdot 10^{8}\ \mathrm{ms}^{-1}$,
	elemi töltés	$e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C,
	neutron tömege	$M = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg,
	nehézségi gyorsulás	$g = 9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}$.
	Ha szükséges, használd:	$\int (1-x)^{1/2}\, dx = -\frac{2(1-x)^{3/2}}{3}$.