Arról, hogy forog-e a Föld a tengelye körül, már a XIV. században hosszú viták folytak a párizsi egyetemen [1]. De ez tiszta spekulációnak volt tekinthető, hiszen semmi olyan jelenséget nem ismertek, mely a kérdést eldönthette volna: a nappalok és éjszakák váltakozását az álló Földről és forgó Égboltról szóló tanítás pont olyan jól magyarázta. Kopernikusz 1543-ban megjelent könyvének, a *De revolutionibus orbium coelestium*-nak előszava is azt hangsúlyozza, hogy tanai csak a *számítást egyszerűsítő matematikai hipotézisek.* A kérdés kísérleti eldöntésére Newton tett először javaslatot [2]: a *Royal Society* 1679. december 4-i ülésén Robert Hooke kurátor felolvasta Newton levelét, melyben a tudós a következőket írta:

> „A Föld forgásáról szóló kopernikuszi tanítás ellenfelei a következő módon okoskodnak: *Ejtsünk le egy toronyból egy súlyos tárgyat. Ha – mint azt Kopernikusz állítja – a Föld valóban nyugatról kelet felé forogna, akkor a tárgy zuhanása közben a torony elfordulna, és így azt nem a torony lábánál, hanem attól* nyugatra *találnánk meg. S mivel nem így történik, ez a Föld forgásáról szóló tanokat cáfolja.* Ez a gondolatmenet – érvel Newton – hibás, mert nem veszi figyelembe a tárgy kezdősebességét. S mivel a torony teteje távolabb van a Föld középpontjától, a tárgy kezdősebessége az elejtés pillanatában nagyobb, mint a torony lábáé. Ezért a tárgyat a függőlegestől nem nyugatra, hanem *keletre* kell megtalálnunk."

Newton levele élénk vitát váltott ki a *Royal Society* jelenlévő tagjai között, melynek során *Flamsteed* Királyi Csillagász megjegyezte, hogy „a Newton által megjósolt effektust jól ismerik a tüzérek, akik tudják, hogy akkor esne vissza a golyó az ágyú csövébe, ha az 87°-os szöget zárna be a vízszintessel".

A *Társulat* december 11-i ülésén Hooke bírálta Newton okfejtését. Felhívta a figyelmet arra, hogy az északi féltekén a leejtett tárgy nem csak kelet, de dél felé is eltérül.

Hová esik a tárgy valójában? Az anti-kopernikánusok okoskodását illetően Newtonnak nyilvánvalóan igaza van: a tárgy – nevezzük „almának" – a „fa" tetejével együtt, azzal megegyező sebességgel mozog, s a „fa" nem „szalad ki" alóla. Mennyi a Newton által jósolt eltérés? Az egyszerűség kedvéért az Egyenlítőn számolva, a kezdeti többlet-sebesség $h\omega$, ahol h a „fa" magassága, $\omega = 7{,}3 \cdot 10^{-5}$/s pedig a Föld szögsebessége. Ez a függőleges mozgást nem befolyásolja, s így az esés ideje a szokásos

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

A keletre térés ezért Newton szerint

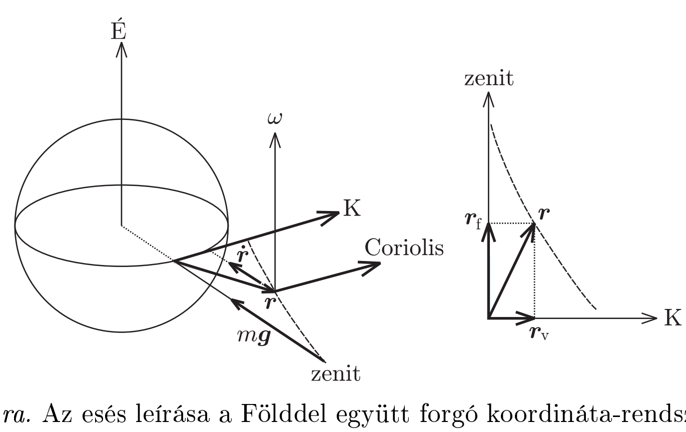
$$\Delta_N = \omega\sqrt{\frac{2h^3}{g}}. \tag{1}$$

Leírás forgó koordináta-rendszerben

A problémát ma a *Földdel együtt forgó koordináta-rendszerben* oldanánk meg [3] (ez Newton idejében természetesen még nem volt ismert). Mint tudjuk [4], a forgó rendszerben háromfajta „tehetetlenségi erő" lép föl. Ezek közül az első a szöggyorsulással arányos; de a Föld forgása jó közelítéssel egyenletes, s ezért ez a tag nulla. A második a centrifugális erő; ez az Egyenlítőn a test súlyának mintegy 3/1000 része, s így szintén elhanyagolható. Marad a harmadik, az ún. *Coriolis-féle* erő; ennek figyelembe vételével a mozgásegyenlet:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{g} + 2\dot{\boldsymbol{r}} \times \vec{\omega}, \tag{2}$$

ahol $\vec{\omega}$ az észak felé mutató, ω hosszúságú szögsebesség-vektor (*1. ábra*), a vektorok feletti „pont" pedig az idő szerinti deriváltat jelöli.



1. ábra. Az esés leírása a Földdel együtt forgó koordináta-rendszerben

Az együttforgó rendszerbeli $\boldsymbol{r}$ rádiuszvektort függőleges és vízszintes komponensekre bontva és a függőleges mozgást szabadeséssel közelítve:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\mathrm{f} + \boldsymbol{r}_\mathrm{v}, \quad \text{ahol} \quad \boldsymbol{r}_\mathrm{f} = \boldsymbol{h} + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2. \tag{3}$$

Mivel a Coriolis-féle gyorsulás $\boldsymbol{g}$-hez képest kicsi, a sebesség első közelítésben függőlegesen lefelé irányul: $\dot{\boldsymbol{r}} \approx \boldsymbol{g}\,t$. A vízszintes mozgásra ezért a következő egyenletet kapjuk:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_\mathrm{v} \approx 2t\boldsymbol{g} \times \vec{\omega}, \qquad \boldsymbol{r}_\mathrm{v}(0) = 0, \qquad \dot{\boldsymbol{r}}_\mathrm{v}(0) = 0. \tag{4}$$

Az Egyenlítőn $\boldsymbol{g}$ és $\vec{\omega}$ merőlegesek, és a Coriolis-erő, $F_\mathrm{C} = 2t\,mg\omega$, keleti irányban téríti el az eső testet. (4)-ből $r_\mathrm{v} = t^3 g\omega/3$, és $t = \sqrt{2h/g}$ miatt

$$\Delta = \frac{2}{3}\cdot\omega\sqrt{\frac{2h^3}{g}} = \frac{2}{3}\cdot\Delta_N, \tag{5}$$

ami a Newton-féle eredménynek, (1)-nek, csak *kétharmada*[1]!

Hol a hiba?

Az eltérés onnan ered, hogy Newton okoskodása *hiányos,* mert figyelmen kívül hagyja, hogy a keleti irányú mozgás során *a Föld vonzásának iránya* is változik, hiszen az minden pillanatban a Föld középpontja felé mutat. Azt hihetnők, ez az effektus olyan kicsi, hogy elhanyagolható. De a Newton-féle effektus is kicsi, és, mint alább megmutatjuk, a tömegvonzás irányának változásából adódó hatás Newtonéval összemérhető! Álló koordináta-rendszerből nézve, leejtés után az „alma” t idő alatt $\Delta\alpha = \omega t$ szöggel mozdul el (*2. ábra*). A nehézségi erőnek ezért $F = -mg\sin\Delta\alpha \approx -mg\Delta\alpha = -mg\omega t$ vízszintes, *nyugat felé mutató* komponense (is) van[2], így a vízszintes mozgás egyenlete:

$$\ddot{x} = -g\,\omega\,t, \qquad x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = \omega(R+h).$$

Kétszer integrálva t szerint és a kezdeti feltételeket figyelembe véve:

$$x(t) = -g\omega\,t^3/6 + \omega(R+h)t.$$

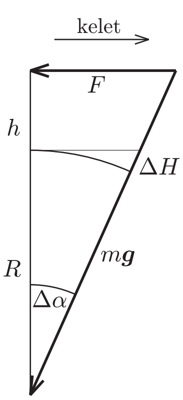
De eközben a „fa” lába is elfordult, mégpedig $\omega\,R\,t$-vel. Az elmozdulás tehát:

$$\Delta = \omega h t - \omega\,g\,\frac{t^3}{6}.$$

Itt az első tag a Newton-féle, a második a vonzóerő irányváltozásából jövő korrekció. Ide az esés

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

idejét beírva, azt kapjuk, hogy a korrekciós tag a Newton-félének *egyharmada,* s abból levonódik; végül tehát újra az (5) eredményt kapjuk.



2. ábra

[1] α szélességi fokon az eredmény $\cos\alpha$-val szorzódik.

[2] Valójában a „fa” nem egyenes, hanem körpálya mentén mozog. De a Föld középpontjától R távolságban, a *2. ábra* szerint az érintő irányú vízszintes és a körpálya távolsága:

$$\Delta H = \frac{R}{\cos\Delta\alpha} - R \approx \frac{R}{2}(\Delta\alpha)^2,$$

ami *másodrendben kicsi,* s így az általunk vizsgált elsőrendű változáshoz képes elhanyagolható. Hasonlóan, a vonzóerő függőleges komponensében a korrekció újra másodrendű:

$$mg\cos\Delta\alpha \approx mg\left(1 - \frac{1}{2}(\Delta\alpha)^2\right) \approx mg.$$

A kezdeti feltételeket megfelelően módosítva Flamsteed korábban idézett állítása is könnyen igazolható [3].

Hooke kísérlete

A december 18-i ülésen Hooke beszámolt arról, hogy a kísérletet elvégezte: egy templomban – miután az ablakokat és ajtókat gondosan lezárta, hogy a huzat hatását kiküszöbölje – kb. 9 méter magasról ejtett súlyos tárgyakat egy „puha pipa-agyaggal" telt ládába, melybe hálószerű rovátkákat vésett. A kísérletet *háromszor*(!) végezte el, és – elmondása szerint – úgy találta, hogy a tárgyak valóban kelet felé esnek. Állítása azonban nem hihető: az általa leírt kísérleti körülmények esetén az eltérés kb. 0,3 mm, ami messze a mérés pontossága alatt van. A Föld forgását mindenki számára meggyőző módon csak Foucault igazolta 1851-ben, a párizsi Pantheonban végzett híres inga-kísérletével.

Hivatkozások

[1] Simonyi Károly: *A fizika kultúrtörténete,* 3. kiadás, Gondolat (Budapest, 1986).

[2] V. I. Arnold: *Huygens* & *Barrow, Newton* & *Hooke,* Birkhäuser (1990).

[3] L. D. Landau, E. M. Lifsic: *Elméleti fizika I. Mechanika,* 39. fejezet.

[4] Budó Ágoston: *Mechanika,* Tankönyvkiadó (Budapest, 1965).