Ezzel a címmel jelent meg egy tanulságos cikk az akkor már fizikai rovattal is kiegészített Lapok 1959/9. számában. A cikket *Vermes Miklós* írta, a Fizikai Rovatot *Kunfalvi Rezső* szerkesztette. Jó barátok voltak, együtt mászták a hegyeket is; mindketten idén lennének 100 évesek. Az alábbi írást az ő emléküknek ajánlom.

*

„A fűszál meghajlik a szélben, a damaszkuszi penge a vívó kezében. Hajlításra vannak igénybe véve azok a vízszintes gerendák is, amelyeket az egyik végükön befalaztak és másik végükön terhet hordanak. Természetesen a rugalmas lehajlásról van most szó, amikor az alakváltoztató erő megszűnte után a tárgy visszatér eredeti alakjába. Vizsgáljuk meg a hajlítás törvényeit." Így kezdődik Vermes Miklós írása. Kiváló invokáció; innen folytassuk!

Tudjuk, hogy a lehajló rúd felső része megnyúlik, az alja összenyomódik, és lesz egy semleges szál, valahol középen, aminek a hossza nem változik meg. Vajon milyen alakú lesz ez a semleges szál? Vékony rúd esetén akár ezt is kérdezhetjük: milyen alakú lesz a lehajló rúd?

Tankönyvekben, még egyetemi tankönyvekben is a lehajló rúd általában körív alakú. Ennek prózai oka van: a rajzoló a legegyszerűbb megoldást választja, a szerző és a lektor pedig simán elfogadja az ábrát, úgysem a meghajlított rúd alakja érdekes, hanem a rúd végének a lehajlása; erre írnak fel, vezetnek le megfelelő formulákat.

Itt most két esetet tárgyalunk. Az egyik, amikor a vízszintesen befogott rúd súlytalan, csak a végét terheljük függőlegesen lefelé irányuló F erővel. Nem erőltetett ez az idealizálás, minden olyan esetben alkalmazható, amikor a rúd végét terhelő F erő sokkal nagyobb, mint a rúd saját súlya. Gondolhatunk akár egy ugródeszkára, amit a műugrók használnak, akár egy horgászbotra, amivel „az évszázad fogását" akarjuk kiemelni a vízből. A KöMaL 2005/2. számának hátoldalán láthatunk egy fényképet a meghajló hurkapálcáról, aminek végét egy vízzel teli nagy tejfölös pohár súlyával terhelte meg a fényképet készítő *Kocsis Vilmos*. Tessék megfigyelni a pálca alakját! Legjobban a befogásnál görbül, legkevésbé pedig a másik végén, ahol az erő hat – itt szinte kiegyenesedik!

Másik eset az, amikor a vízszintesen befogott rúd a „saját súlya alatt" hajlik meg. Ennek még több alkalmazása van környezetünkben: visszavezethető rá a fák ágainak meghajlásától kezdve a hidak meghajlásáig nagyon sok jelenség. A magasugró vagy rúdugró léc behajlása például úgy tárgyalható, mint a „kéttámaszú tartó" behajlása.

Egy gyümölcsöző analógia

Jól ismert a forgómozgás alapegyenlete, a dinamika forgómozgásra vonatkozó alaptörvénye:

$$M = \Theta \cdot \beta.$$

Jelentése: a testre ható forgatónyomaték és a létrejövő szöggyorsulás arányosak, az arányossági tényező a tehetetlenségi nyomaték.

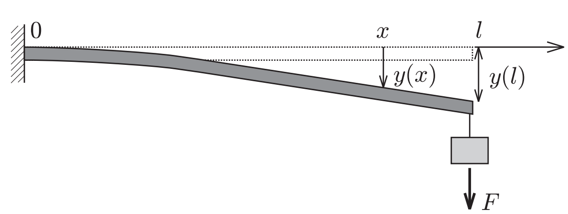
Formailag ehhez hasonló összefüggést lehet felírni sztatikában, hajlítás esetén:

$$M = (EI) \cdot G.$$

Jelentése: a meghajlított test adott pontjában ható forgatónyomaték és az adott pontban létrejövő görbület arányosak, az arányossági tényezőt hajlítási merevségnek nevezik. Értéke az E Young-modulus és az I felületi nyomaték szorzata.

Ahogyan a tehetetlenségi nyomaték a testnek az adott tengelyre vonatkozó tömegeloszlásától függ és folytonos tömegeloszlás esetén integrálszámítással határozható meg, ugyanúgy az I felületi nyomaték is a meghajló rúd keresztmetszetének alakjától függ és általában integrálszámítással határozható meg. Ha például a meghajló rúd keresztmetszete a szélességű és b magasságú téglalap, akkor $I = \frac{1}{12}ab^3$.

További hasonlóság a két összefüggés között, hogy a dinamikai egyenletben szereplő szöggyorsulás a szögelfordulás *idő szerinti második deriváltja,* míg a sztatikus egyenletben szereplő görbület a lehajló rúd alakját megadó $y(x)$ függvény *hely szerinti második deriváltja* (legalábbis első közelítésben, kis lehajlás esetén). Éppen ez ad lehetőséget arra, hogy a lehajló rúd alakját meghatározzuk.



1. ábra

I. eset. Tegyük fel, hogy a vízszintesen befogott rúdnak l hosszúságú darabja áll ki a falból. A rúd súlyától eltekinthetünk, amikor a végére F erő hat függőlegesen lefelé (*1. ábra*). Ekkor a befogott végétől x távolságra ($0 \le x \le l$) lévő pontra vonatkozó forgatónyomaték

$$M = F(l - x).$$

Ezek szerint

$$F(l - x) = EI\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}.$$

Ennek a differenciálegyenletnek a megoldását szolgáltató $y(x)$ függvény adja meg a lehajló rúd alakját. Nem is olyan nehéz ezt a függvényt megtalálni. Ha

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{F}{EI}\,(l - x),$$

akkor

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{F}{EI}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right),$$

és hasonló módon

$$y(x) = \frac{F}{EI}\left(l\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Felhasználtuk közben, hogy a befogásnál ($x = 0$-nál) $y = 0$ és az érintő vízszintes: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$.

A lehajló rúd tehát nem körív alakú, se nem parabola alakú, hanem egy harmadfokú görbéből származtatható. Ebből a függvényből megkaphatjuk azt a képlettárakban is szereplő formulát, ami a rúd végének lehajlására vonatkozik:

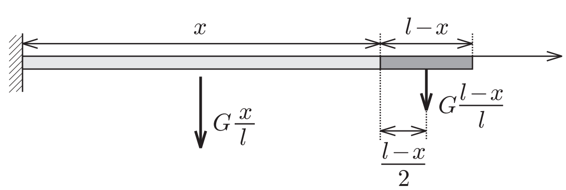
$$y(l) = \frac{F}{EI}\left(\frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{6}\right) = \frac{F}{EI}\,\frac{l^3}{3}.$$

Speciálisan téglalap keresztmetszetű rúdnál: $I = \dfrac{1}{12}ab^3$, tehát

$$y(l) = \frac{4F}{EI}\left(\frac{l}{b}\right)^3.$$

II. eset. Ha a rúd saját súlya alatti lehajlását vizsgáljuk, akkor azt kell figyelembe vennünk, hogy a rúd adott x pontjára vonatkozó hajlító nyomaték a G összsúlyú rúdnak attól a részétől származik, ami x-től a rúd végéig terjed (*2. ábra*). Ennek a darabnak a súlya $G\dfrac{l-x}{l}$, súlypontja az x helytől $\dfrac{l-x}{2}$ távolságra van, tehát az x helyre vonatkozó forgatónyomaték:

$$M = G\frac{l-x}{l}\cdot\frac{l-x}{2} = \frac{G}{2l}(l-x)^2.$$



2. ábra

A forgatónyomatékkal arányos görbület most is ott a legnagyobb, ahol $(l - x)$ a legnagyobb, tehát a befogásnál, $x = 0$-nál. Az is igaz marad, hogy a meghajlott rúd görbülete a vége felé haladva nullához tart, a rúd szabad vége mintegy „kiegyenesedik”. Az első esethez képest a különbség abban van, hogy a görbület most nem lineárisan, hanem négyzetesen változik a rúd mentén. Ha

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{G}{2lEI}\,(l-x)^2 = \frac{G}{2lEI}\,(l^2 - 2lx + x^2),$$

akkor

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{G}{2lEI}\left(l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3}\right),$$

és végül

$$y(x) = \frac{G}{2lEI}\left(l^2\frac{x^2}{2} - l\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right).$$

Most is felhasználtuk, hogy a befogásnál ($x = 0$-nál) $y = 0$ és az érintő vízszintes: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$.

A saját súlya alatt meghajló rúd alakja tehát egy másod- , egy harmad- és egy negyedfokú „parabola” megfelelő súlyozott keveréke. A rúd végének lehajlása:

$$y(l) = \frac{G}{8EI}\, l^3.$$

Ha téglalap keresztmetszetű rúdról van szó:

$$y(l) = \frac{3}{2}\,\frac{G}{Ea}\left(\frac{l}{b}\right)^3.$$

Felhasználhatjuk, hogy $G = V\varrho g = lab\varrho g$, ezzel

$$y(l) = \frac{3}{2}\,\frac{\varrho g}{E}\,\frac{l^4}{b^2}.$$

Érdekes, hogy a lehajlás anyagi minőségtől való függése a $\dfrac{\varrho}{E}$ hányadoson keresztül jelenik meg. Például acélra $E \approx 2 \cdot 10^{11}\ \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$ és $\varrho \approx 7{,}8 \cdot 10^3\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, míg fenyőfára $E \approx 10^{10}\ \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$ és $\varrho \approx 0{,}5 \cdot 10^3\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, vagyis a $\dfrac{\varrho}{E}$ hányados acélra alig tér el a fenyőfára érvényes értéktől. Az azonos keresztmetszetű és hosszúságú acélrúd tehát nagyjából ugyanúgy hajlik le a saját súlya alatt, mint a fenyőfából készült rúd. A különbség majd akkor jelentkezik, ha külső erő terheli a rudakat.

Sok érdekes következménye van még a most levezetett formuláknak, a lehajló rúd alakjára kapott összefüggéseknek; az Olvasó maga is felfedezhet néhányat. Befejezésül álljon itt az a probléma, melyet Vermes Miklós vetett fel az említett cikk végén: *„Érdekes annak a gerendának a lehajlása, amelynek keresztmetszete ékalakúan vékonyodik a vége felé. . . ”*. Vajon ekkor milyen alakú lesz a saját súlya alatt meghajló gerenda? Szinte látom, ahogy Vermes és Kunfalvi összekacsintottak: erre a hegyre nem lesz könnyű felmászni, de biztosan lesz olyan, akinek sikerül!