A szerkesztőségnek tömérdek munkája van. Arra kéri olvasóit, segítsenek a munkában, döntsék el, közölnék-e a lapban az alábbi két feladatot, illetőleg az alábbi két megoldással közölnék-e.

1. feladat: *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\frac{1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}+a^n}{a+a^2+\ldots+a^{n-1}} \geqq \frac{n+1}{n-1},$$

ha $a>0$ *és* n *1-nél nagyobb természetes szám.*

Megoldás: A számtani közép nem kisebb a mértani középnél. Ezt a számlálóban, majd a nevezőben álló számokra felhasználva

$$\begin{aligned} 1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}+a^n &\geqq (n+1)\sqrt[n+1]{1\cdot a\cdot a^2\ldots a^{n-1}\cdot a^n},\\ a+a^2+\ldots+a^{n-1} &\geqq (n-1)\sqrt[n-1]{a\cdot a^2\ldots a^{n-1}}. \end{aligned}$$

Mindkét oldalon pozitív mennyiségek állnak, tehát a két egyenlőtlenség hányadosát véve kapjuk, hogy

$$\frac{1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}+a^n}{a+a^2+\ldots+a^{n-1}} \geqq \frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{\sqrt[n+1]{a^{1+2+\ldots+n}}}{\sqrt[n-1]{a^{1+2+\ldots+n-1}}} =$$

$$= \frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{\sqrt[n+1]{a^{\frac{(n+1)n}{2}}}}{\sqrt[n-1]{a^{\frac{(n-1)n}{2}}}} = \frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{a^{\frac{n}{2}}}{a^{\frac{n}{2}}} = \frac{n+1}{n-1}.$$

Ezzel a bizonyítandó egyenlőtlenséget igazoltuk.

*

– A feladat állítása helyes, bizonyítottuk is lapunk XV. köt. 5. számában a 151–152. o. a 822. feladatban. A megoldásban azonban hiba van: pozitív tagú és egyező értelmű egyenlőtlenségeket egymással osztva a kapott egyenlőtlenség már nem föltétlenül lesz helyes; pl.

$$8>6,\quad 2>1,$$

de a két oldal hányadosát véve 4 már nem nagyobb, mint 6.

Máthé Csaba (Győr, Révai g. II. o. t.)

– Megjegyezzük, hogy a 822. feladatra többen az itt közölt „megoldás”-t küldték be a feladat kitűzése idején.

2. feladat: *Egy paralelogramma területe* $100\ \mathrm{cm}^2$*. A négyszöget átlói négy háromszögre bontják, amelyek közül kettő-kettő egybevágó. Az egyik háromszög területe* $20\ \mathrm{cm}^2$*. A másik (vele nem egybevágó) háromszögben szereplő paralelogramma-oldalon nyugvó két szög* 30°*, ill.* 20°*. Milyen hosszú az említett paralelogramma-oldal?*

Megoldás: A paralelogrammát egy átlója két egybevágó háromszögre bontja, így egy ilyen háromszög területe $50\ \mathrm{cm}^2$. A másik átló meghúzásával ez két háromszögre bomlik; mivel egyik területe $20\ \mathrm{cm}^2$, a másiké 30. Ha a kérdéses paralelogramma-oldalt x-szel jelöljük, az x oldalból és a három ismert szögből – 20°, 30° ill. $180^\circ-(20^\circ+30^\circ)=130^\circ$– a háromszög területe ismert tétel alapján meghatározható:

$$\frac{x^2\sin 20^\circ\sin 30^\circ}{2\sin 130^\circ}=30,$$

Ebből

$$x=\sqrt{\frac{60\sin 50^\circ}{\sin 20^\circ\sin 30^\circ}}.$$

A kérdéses paralelogramma-oldalt kiszámítottuk. Ebből a szögfüggvényértékeket logaritmustáblából kikeresve s a műveleteket elvégezve x számértékét közelítőleg is megkaphatjuk.

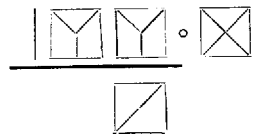
*

– A két átló meghúzásával a paralelogrammát négy háromszögre osztjuk, amelyek közül kettő-kettő egybevágó. Tekintsünk ezek közül egy-egy nem egybevágót s vegyük alapjuknak a közös félátlót. Ehhez az oldalhoz tartozó magasságai is egyenlőek, s így a két nem egybevágó háromszög területe: az alap és magasság szorzatának fele, egyenlő lesz. A két átló a paralelogrammát tehát négy egyenlő területű háromszögre bontja.

Ha a teljes paralelogramma területe $100\ \mathrm{cm}^2$, a negyedrésze nem lehet $20\ \mathrm{cm}^2$, a példa tehát fölösleges és ellentmondó adatokat tartalmaz. Ha az adatok közül az összterületet $120\ \mathrm{cm}^2$-nek vesszük, a $20\ \mathrm{cm}^2$-t pedig elhagyjuk, akkor a megoldás lényegében helyes.

Majtényi Sándor (Miskolc, Kilián g. III. o. t.)

3. feladat: *A világűr rakéta a Marsba érkezik. Az utasok egy iskolát látogatnak meg. Egy üres tanterem tábláján befejezetlen szorzáspéldát látnak:*



Megértik a vonaldarabok számából, hogy a befejezetlen művelet arab számokkal:

$$\frac{177\cdot 6}{5}.$$

A marslakók számrendszerének, úgy látszik, nem tíz az alapszáma. Gondolkozni kezdenek, hogy akkor mi lehet.
Gondolkozzunk mi is, és fejezzük be a szorzást!

Megoldás: A kijelölt szorzásban az eredmény utolsó jegye 5, ez úgy lehetséges, hogy az utolsó jegyet megadó $6\cdot 7=42$ szorzatból maradékként 37-et választunk le. A 37 az ismeretlen alapszámnak egész számú többszöröse. Az alapszámnak pozitívnak kell lennie. Mivel 37 törzsszám, az alapszám csak 1 vagy 37 lehet. A műveletben 1-nél nagyobb számok is szerepelnek, ezért az alapszám csak 37 lehet.

A kijelölt szorzás tehát:

$$\begin{aligned}(1\cdot 37^2+7\cdot 37+7)\cdot 6&=6\cdot 37^2+42\cdot 37+42=\\=6\cdot 37^2+(37\cdot 37+5\cdot 37)+(37+5)&=7\cdot 37^2+6\cdot 37+5.\end{aligned}$$

A szorzás tehát a marslakók számrendszerében:

$$\begin{array}{l}\underline{177}\cdot 6\\765\end{array}$$

Szász Domonkos (Bp. V., Eötvös g. III. o. t.)

*

A legszabatosabban indokolt megoldásokért könyvjutalmat nyertek:
Czinege Imre (Pannonhalma, Bencés g. III. o. t.),
Fenyő Gábor (Bp. V., Eötvös g. II. o. t.),
S. Nagy Erzsébet (Makó, József A. g. III. o. t.).

Sorshúzás alapján vigaszdíjként könyvjutalomban részesültek:
Bollobás Béla (Bp. V., Apáczai Csere g. I. o. t.),
Mezey Ferenc (Bp. II., Rákóczi g. II. o. t.),
Nagy Márton (Szombathely, Nagy Lajos g. I. o. t.).
– A könyveket postán az iskolákhoz kiküldtük.