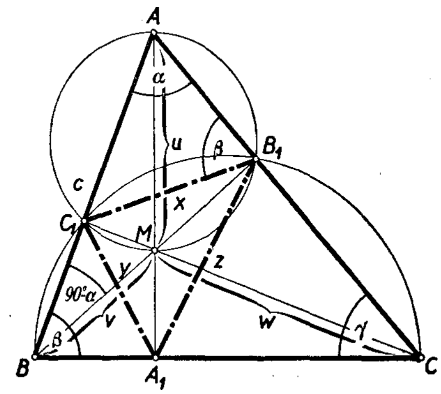
A magasságvonalak talppontja által meghatározott háromszög, az ún. talpponti háromszög igen sok érdekes tulajdonsággal rendelkezik. Leghíresebb az a régóta ismert tulajdonsága, hogy a háromszögbe írt háromszögek közül a legkisebb kerületű (ld. a Fejér-féle bizonyítást az I. gimnáziumi tankönyvben 332 – 334. old.). Háromszögszerkesztés szempontjából is sok érdekességet nyújt. Jelen dolgozatban a talpponti háromszög adatait hozzuk összefüggésbe az eredeti háromszög adataival.

1. Egyelőre hegyesszögű háromszögről lesz szó. Jelöljük az eredeti ABC háromszög szögeit α, β, γ-val, e szögekkel szemben fekvő oldalakat a, b, c-vel, az $A_1B_1C_1$ talpponti háromszögnek ezen oldalakkal szemben fekvő oldalai legyenek rendre $B_1C_1 = x$, $C_1A_1 = y$, $A_1B_1 = z$ (ld. az ábrát).



BCB_1C_1 húrnégyszög, s így

$$AB_1C_1\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \beta.$$

Az ABC és AB_1C_1 háromszögek két szögben (α és β) megegyeznek, tehát hasonlóak. Következőleg

$$\frac{x}{a} = \frac{AB_1}{AB} = \cos\alpha$$

vagyis (mindjárt felírva a hasonló képleteket y és z-re is)

(I) $$x = a\cos\alpha, \qquad y = b\cos\beta, \qquad z = c\cos\gamma$$

.

2. Jelöljük az $ABC_\triangle$, magassági pontját M-mel, és legyenek az MA, MB, MC szakaszok rendre u, v, w.

A Thales-tétel alapján az AB_1MC_1 négyszög, valamint a BC_1B_1C négyszög húrnégyszög. Egy r sugarú kör $h(< 2r)$ húrja és a húr egyik végpontjából kiinduló átmérő által alkotott derékszögű háromszögből

(1) $$h = 2r\sin\varepsilon, \qquad \text{vagyis} \qquad 2r = \frac{h}{\sin\varepsilon},$$

ahol ε a húrhoz tartozó hegyes kerületi szög.

Az AB_1MC_1 húrnégyszög köré irt kör átmérője $MA = u$, és így a $C_1B_1 = x$ húrra alkalmazva az (1) összefüggést

(2) $$u = \frac{x}{\sin\alpha}.$$

(1)-hől

(3) $$a = \frac{x}{\cos\alpha}$$

(2)-t osztva (3)-mal, nyerjük, hogy

$$\frac{u}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha.$$

Ha r-rel jelöljük az $ABC_\triangle$ köré írt kör sugarát, akkor (1) alapján $a = 2r\sin\alpha$, és így (mindjárt felírva a v és w-re adódó analóg formulákat is)

$$u = a\operatorname{cotg}\alpha = 2r\cos\alpha,$$
$$v = b\operatorname{cotg}\beta = 2r\cos\beta,$$
$$w = c\operatorname{cotg}\gamma = 2r\cos\gamma.$$

3. Az $ABC_\triangle$, területe (T) összetevődik a BCM, CAM és ABM háromszögek területeinek összegéből. Az $ABC_\triangle$ AA_1, BB_1, CC_1 magasságait rendre m_a, m_b, m_c-vel jelölve

$$a(m_a - u) + b(m_b - v) + c(m_c - w) = 2T,$$

amiből

$$au + bv + cw = am_a + bm_b + cm_c - 2T = 6T - 2T = 4T.$$

Ha (II)-ből u, v, w értékeit behelyettesítjük, nyerjük, hogy

$$2r(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma) = 4T,$$

vagyis

$$2T = r(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma) = r(x + y + z) = rk, \tag{III}$$

ahol k jelenti a talpponti háromszög kerületét.

Ismeretes, hogy K-val jelölve az $ABC_\triangle$, kerületét és ϱ-val a beírt kör sugarát

$$K\varrho = 2T, \tag{4}$$

és igy (III) és (4) egybevetéséből

$$kr = K\varrho,$$

vagyis

$$\frac{k}{K} = \frac{\varrho}{r}. \tag{IV}$$

4. A cosinus-tétel alapján

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

vagyis a $K = 2s$ jelölést bevezetve

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{a}{2} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \tag{5}$$
$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2s\cdot 2(s-a)}{2bc}.$$

Innen

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

Hasonlóképpen nyerjük, hogy

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}, \qquad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

Másrészt

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{a}{2} = \frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{2bc} = \tag{6}$$
$$\frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{2(s-b)2(s-c)}{2bc},$$

ahonnan

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad \text{hasonlóképpen} \quad \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$$
$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

Mivel (1) alapján $\sin\gamma = \dfrac{c}{2r}$, igy

$$T = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{abc}{4r}, \qquad \text{ahonnan} \qquad r = \frac{abc}{4T}. \tag{7}$$

Tehát felhasználva Heron képletét

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} = \frac{T^2}{sabc} = \frac{T\frac{T}{s}}{abc},$$

ahonnan (4), (7) és (IV) figyelembevételével

$$\text{(V. 1)} \qquad \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{T\varrho}{4Tr}=\frac{\varrho}{4r}=\frac{k}{4K}.$$

(7) és (IV) felhasználásával

$$\text{(V. 2)} \qquad \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{abc}=\frac{sT}{abc}=\frac{s}{4r}=\frac{K}{8r}=\frac{k}{8\varrho}.$$

(V. 1) és (V. 2) osztásából

$$\text{(V. 3)} \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\varrho}{s}=\frac{2\varrho}{K}.$$

5. Érdekes módon hozható kapcsolatba a talpponti háromszög oldalaival az az arány, amely a magassági pontnak a csúcstól való távolsága és az egész magasságvonal hossza között fennáll. Ugyanis

$$\frac{u}{m_a}=\frac{a\operatorname{cotg}\alpha}{m_a}=\frac{a^2\operatorname{cotg}\alpha}{am_a}=\frac{\dfrac{a}{\sin\alpha}\cdot a\cos\alpha}{2T}=\frac{2rx}{2T},$$

tehát

$$\text{(VII)} \qquad \frac{u}{m_a}=\mu_a=\frac{r}{T}x, \qquad \frac{v}{m_b}=\mu_b=\frac{r}{T}y, \qquad \frac{w}{m_c}=\mu_c=\frac{r}{T}z,$$

Innen

$$x:y:z.$$

Továbbá (III) figyelembevételével

$$\mu_a+\mu_b+\mu_c=\frac{r}{T}(x+y+z)=\frac{rk}{T}=\frac{2T}{T}=2.$$

Ebből nyilvánvaló, hogyha két magasságvonalon ismeretes az osztási arány, akkor a talpponti háromszöghöz hasonló talpponti háromszög, ebből pedig az eredeti hegyesszögű háromszöghöz hasonló háromszög szerkeszthető.

6. Egyébként k igen érdekesen fejezhető ki az $ABC_\triangle$ oldalaival. (5) és (6) alapján

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{aligned} x&=a\cos\alpha=a\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=a\frac{s(s-a)-(s-b)(s-c)}{bc}=\\ &=a\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=a\frac{4s(s-a)-2bc}{2bc}=\frac{2a^2s(s-a)-a^2bc}{abc}.\end{aligned}$$

A betűk ciklikus felcserélésével hasonló formulákat nyerünk y-ra és z-re, és így

$$\text{(IX)} \qquad \begin{aligned} k=x+y+z&=\frac{2s\big[a^2(s-a)+b^2(s-b)+c^2(s-c)\big]-abc(a+b+c)}{abc}=\\ &=\frac{2s\big[a^2(s-a)+b^2(s-b)+c^2(s-c)-abc\big]}{abc}.\end{aligned}$$

Mivel $2s=K$, azért

$$\frac{k}{K}=\frac{s(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^3)}{abc}-1.$$

2-vel szorozva

$$\frac{2k}{k}=\frac{2s(a^2+b^2+c^2)-2(a^3+b^3+c^3)}{abc}-2,$$

ahonnan (4) figyelembevételével

$$\text{(X)} \qquad \begin{aligned} \frac{2k}{K}+2=\frac{2\varrho}{r}+2&=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-2(a^3+b^3+c^3)}{abc}=\\ &=\frac{ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2-a^3-b^3-c^3}{abc}=\\ &=\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}-\frac{a^2}{bc}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{c}-\frac{b^2}{ac}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}-\frac{c^2}{ab}\right).\end{aligned}$$

Egyenlő szárú háromszög esetén, ha $a = b$, (X)-ből

$$\frac{2k}{K} + 2 = \frac{2\varrho}{r} + 2 = \left(1 + \frac{a}{c} - \frac{a}{c}\right) + \left(1 + \frac{a}{c} - \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{2c}{a} - \frac{c^2}{a^2}\right)$$

ahonnan

(XI) $$\frac{k}{K} = \frac{\varrho}{r} = \frac{c}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{a^2} = 2\frac{c}{2a} - 2\left(\frac{c}{2a^2}\right)^2 = 2\sin\frac{\gamma}{2} - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

7. (1) alapján

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{K} = \frac{\frac{a}{2r} + \frac{b}{2r} + \frac{c}{2r}}{K} = \frac{a+b+c}{2rK} = \frac{1}{2r},$$

vagyis (IV) figyelembevételével

(XII) $$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{K}{2r} == \frac{k}{2\varrho}.$$

(V. 1) és (V. 2) 8-szoros szorzata

$$8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 8\frac{k}{4K} \cdot \frac{K}{8r},$$

vagyis

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{k}{4r}.$$

(XII) és (XIII) hányadosa

(XIV) $$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{2r}{\varrho},$$

8. Felhasználva a

(8) $$\varrho \leqq \frac{r}{2}$$

ismert egyenlőtlenséget (ld. jelen számunkban a 744. sz. kitűzött feladatot) (IV)-ből következik

(IV') $$\frac{k}{K} \leqq \frac{1}{2},$$

továbbá (III) és (IV') alapján

$$4T = 2rk \leqq 2r\frac{K}{2} = rK,$$

amiből

(III') $$\frac{r}{4} \geqq \frac{T}{K}.$$

Végül (XIV)-ből – (8) figyelembevételével – következik

(XIV') $$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geqq 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

A (IV'), (III'), (XIV') egyenlőtlenségekben az egyenlőség jele csak szabályos háromszög esetén érvényes.

9. Eddig tulajdonképpen csak hegyesszögű háromszögről beszéltünk, bár több általánosan érvényes tételt felhasználtunk és levezettünk.

Derékszögű háromszög esetén a talpponti háromszög egyenessé fajul, tehát háromszögről, mint olyanról, nem beszélhetünk.

Tompaszögű háromszögre mindenekelőtt megállapítjuk, hogy ugyanahhoz a talpponti háromszöghöz mindig tartozik egy hegyesszögű és három tompaszögű háromszög. Pl. ábránkban az AMB, BMC és CMA tompaszögű háromszögeknek ugyancsak az $A_1B_1C_1$, a talpponti háromszögük. Azonkívül mindhárom tompaszögű háromszög köré írt körének sugara megegyezik a $ABC_\triangle$ köré írt kör r sugarával. (Ez következik a Vályi-féle tételből. L. 332. sz. gyakorlatot a múlt számunkban.)

Tehát az $A_1B_1C_{1\triangle}$ talpponti háromszöge az u, v, c oldalú $BAM_\triangle$-nek, amelynek szögei rendre $90° - \alpha$, $90° - \beta$, $\alpha + \beta$. De (3) alatt láttuk, hogy

$$x = u\sin\alpha = u\cos(90° - \alpha).$$

Ugyanígy

$$y = v \sin\beta = v\cos(90^\circ - \beta).$$

(1)-ből

$$z = c\cos\gamma = -c\cos(\alpha+\beta).$$

Tehát tompaszögű háromszög esetén a (I) képletekben a tompaszöggel szembenfekvő oldalt negatív előjellel kell venni. Ezek szerint egy a_1, b_1, c_1, oldalú és α_1, β_1, γ_1 szögű háromszög talpponti háromszögének kerülete, ha $\gamma_1 > 90^\circ$,

$$k_1 = a_1\cos\alpha_1 + b_1\cos\beta_1 - c_1\cos\gamma_1.$$

Amíg a talpponti háromszög kerület-képlete tompaszögű háromszög esetén megváltozik, addig az eredeti háromszög területének (III) képlete:

$$2T_1 = r_1(a_1\cos\alpha_1 + b_1\cos\beta_1 + c_1\cos\gamma_1)$$

változatlan marad, amint azt az alábbiakban megmutatjuk.

$$\begin{aligned} 2t_{AMB} = 2t_{ABC} - 2t_{BMC} - 2t_{CMA} &= 2T - a(m_a - u) - b(m_b - v) = \\ &= 2T - 2T + au - 2T + bv = au + bv - 2T = \\ &= r(2a\cos\alpha + 2b\cos\beta - a\cos\alpha - b\cos\beta - c\cos\gamma) = \\ &= r(a\cos\alpha + b\cos\beta - c\cos\gamma). \end{aligned}$$

Másrészt alkalmazzuk most a (III) képletet az $AMB_\triangle$-re

$$(\mathrm{a}_1 = u,\ b_1 = v,\ \mathrm{c}_1 = c, \quad \alpha_1 = 90^\circ - \alpha, \quad \beta_1 = 90^\circ - \beta, \quad \gamma_1 = \alpha + \beta \quad r_1 = r)$$
$$2t_{AMB} = r\big[u\cos(90^\circ - \alpha) + v\cos(90^\circ - \beta) + c\cos(\alpha+\beta)\big].$$

(II) figyelembevételével

$$2t_{AMB} = r(a\cos\alpha + b\cos\beta - c\cos\gamma).$$

Ezzel igazoltuk állításunkat.

Nem érvényes természetesen tompaszögű háromszögre a (IV)

$$\frac{\varrho_1}{r_1} = \frac{k_1}{K_1}$$

képlet. Igaz marad ugyan – amint láttuk – a

$$K_1\varrho_1 = 2T_1 = r_1(a_1\cos\alpha_1 + b_1\cos\beta_1 + c_1\cos\gamma_1),$$

azaz a

$$\frac{\varrho_1}{r_1} = \frac{a_1\cos\alpha_1 + b_1\cos\beta_1 + c_1\cos\gamma_1}{K_1}$$

összefüggés, csakhogy most a jobboldal számlálója nem egyenlő k_1-gyel.

A többi összefüggés vizsgálatát már ezek alapján az olvasóra bízzuk.