Ha a tömegpont előírt pályán mozog, kényszermozgásról beszélünk. A kényszermozgás tárgyalása vagy úgy történik, hogy a ható erőnek a pálya irányába eső komponensével számolunk, tehát a ható erőt és a *kényszert* együtt vesszük figyelembe, vagy úgy, hogy olyan erőt keresünk, amely a ható erővel együtt éppen a gyorsító erőkomponenst adja. Ekkor tehát a kényszert a kényszererő felvételével vesszük számításba. A kényszererőt a pálya rugalmas erői létesítik és iránya kifelé mutat.

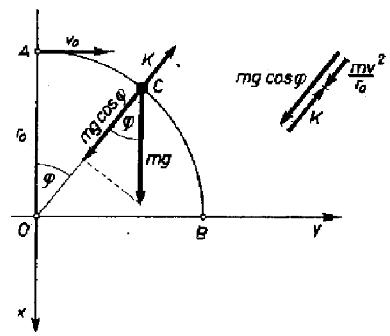
A kényszererő a pályára mindig merőleges, ha mozgást akadályozó erő nincs, ezért a tárgyalások egyszerűsítése céljából a súrlódástól és közegellenállástól eltekintünk.

A kényszermozgásra példaképpen többnyire a lejtőn esést, az egyenletes körmozgást és az ingamozgást szoktuk említeni. Ezek a mozgás folyamán meg is maradnak kényszermozgásnak. Ez arra a téves gondolatra vezethet, hogy egy mozgás vagy szabad, vagy kényszermozgás.

A következőkben be fogjuk mutatni a függőleges elhelyezésű körpályán történő mozgásnak, mint változó sebességű körmozgásnak két esetét. Mint látni fogjuk, az elsőben a kényszererő állandóan csökken, sőt egy ponton 0-vá lesz, és így a mozgás szabaddá válik.

1.

Legyen tehát a pálya kör alakú, függőleges helyzetű, félkör keresztmetszetű vályú, amely kifelé nyitott. Ebben a legmagasabb A pontból indítjuk el a tömegpontot reprezentáló gömböt, kezdősebesség nélkül, vagy v_0 kezdősebességgel.



1. ábra

A tömegpontra mozgás közben két erő hat: a gravitációs erő, mely függőlegesen lefelé irányul, és a pályára merőleges, kifelé mutató K kényszererő. A pályára merőleges komponenseik eredője a körpályán való tartáshoz szükséges centripetális erőt kell, hogy kiadja. Ha pozitív iránynak a középpont felé mutató irányt vesszük fel (tehát ilyenkor a K kényszererő negatív előjelű!)

(1) $$\frac{mv^2}{r_0} = mg\cos\varphi + K \quad \text{lesz.}$$

Tehát

(2) $$K = \frac{mv^2}{r_0} - mg\cos\varphi.$$

Például: a legfelső pontban ($\varphi_0 = 0°$), kezdősebesség nulla, $K_0 = -mg$, tehát a mozgó pont súlya, negatív előjellel.

A negatív előjel annyit jelent, hogy ez az erő kifelé mutat. Ha a mozgás folyamán v nő, a kifelé mutató kényszererő állandóan csökken. Egy időpillanatban K 0-vá lesz, és a mozgás szabaddá válik.

A kényszermozgás feltétele tehát a (2) alapján

$$\frac{mv^2}{r_0} - mg\cos\varphi < 0,$$

(3) $$v^2 < r_0 g\cos\varphi.$$

A mozgás szabad, ha

(3a) $$v^2 \geq r_0\ g\cos\varphi.$$

a) Ha a kezdősebesség 0 és $\varphi = 0$, azaz a kezdőpontban (3) mindig teljesül, mert $0 < r_0 g$, és kényszermozgás kezdődik. A mozgás folyamán v nő, a $\cos\varphi$ csökken, ezért a $\varphi = \varphi_1$ helyen $K =$ 0-vá lesz, a mozgás szabaddá válik. Ekkor a mozgás sebessége

(3b) $$v_1^2 = r_0 g\cos\varphi_1.$$

b) Ha a kezdősebesség $v_0 \neq 0$, és teljesül

(4a) $$v_0^2 < r_0 g, \quad \text{akkor}$$

kényszermozgás esete áll fenn. Ha viszont a kezdősebesség nagy, és

$$v_0^2 \geq r_0 g, \tag{4b}$$

a mozgás szabad, körmozgásról nem beszélhetünk, a pont vízszintes hajítást végez. Most állapítsuk meg azt a φ_1 szöget, amelynél a mozgás szabaddá válik, ha (4a) teljesül.

A függőleges körmozgás esetében az energiatétel

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgr_0 \cos\varphi = E. \tag{5}$$

Az E energiaállandót a kezdőállapot határozza meg, amelyben a sebesség v_0

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgr_0 = E.$$

Így

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) + mgr_0(\cos\varphi - 1) = 0. \tag{6}$$

A mozgás szabaddá válásának feltétele (3b) szerint $v_1^2 = r_0 g \cos\varphi_1$.

Behelyettesítve

$$r_0 g \cos\varphi_1 - v_0^2 + 2r_0 g(\cos\varphi_1 - 1) = 0, \tag{7}$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3r_0 g}.$$

A jobboldal nyilvánvalóan mutatja, hogy $\cos\varphi_1$ legkisebb, tehát a φ_1 szögelfordulás legnagyobb, ha $v_0 = 0$. Kezdettől szabad a mozgás, ha

$$1 = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3r_0 g}, \qquad v_0^2 = r_0 g, \tag{7a}$$

megegyezésben (4b)-vel.

Most még számítsuk ki a φ_1 szöghöz tartozó sebességet!

A (6) alapján, ha (7)-et is figyelembe vesszük:

$$v_1^2 = v_0^2 + 2gr_0(1 - \cos\varphi_1) = \frac{1}{3}\left[2gr_0 + v_0^2\right]. \tag{8}$$

Végezzünk számításokat azokban az esetekben, amikor $v_0 = 0$, $v_0 = 150$ cm sec^{-1}, és ha $v_1 = v_0$. A mi kísérleteinkben $r_0 = 50$ cm volt.

Az eredményt az I. táblázatban foglaljuk össze:

v_0 cm sec^{-1}	v_1 cm sec^{-1}	φ_1
0	180	48°10'
150	200	20°
221,5	221,5	0°

1. táblázat

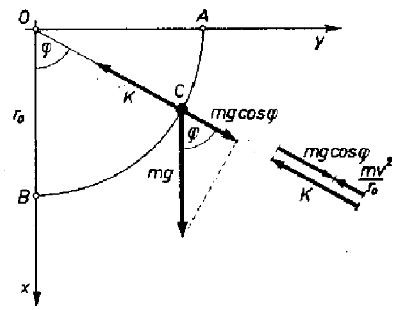
v_0 jelenti a kezdősebességet, v_1 azt a sebességet, amelynél a mozgás szabaddá lesz, φ_1 a v_1 sebességhez tartozó szögelfordulás.

Figyeljük meg v_1 növekedését (a határsebességhez), ha v_0 0-tól a határsebességig nő. (A 180 cm sec^{-1} sebesség [első sor] azonos azzal a sebességgel, mintha a pont a lejtő magasságán át szabadon esett volna.)

II.

A függőleges körmozgás másik esete legyen a (2) ábra szerint. A kör alakú vályú felülről nyitott. A kezdőpont legyen a legfelső A pont. A potenciális energiát B pontban tekintsük 0-nak. Tehát C pontban

$$E_p = mr_0 g - mr_0 g \cos\varphi.$$



2. ábra

Legyen most a kifelé mutató irány pozitív. Ekkor a mozgó pontra ható erők így írhatók fel:

$$-\frac{mv^2}{r_0} = K + mg\cos\varphi,$$

és így

$$K = -mg\cos\varphi - \frac{mv^2}{r_0}. \tag{9}$$

A negatív jel azt jelenti, hogy ez az erő O felé mutat. Ha a kezdősebesség, $v_0 = 0$, A pontban $K = 0$, tehát a mozgás, mint esés kezdődik, és mint kényszermozgás folytatódik. A mozgás folyamán v állandóan nő, tehát $K = 0$ nem lehet. Ez a változó sebességű körmozgás mindig kényszermozgás marad.

Írjuk fel az energiatételt:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mr_0g - mr_0g\cos\varphi = E. \tag{10}$$

Ha a kezdősebesség v_0 ($\varphi = 90^\circ$ esetében)

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mr_0g = E,$$

és

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) - mr_0g\cos\varphi = 0. \tag{10a}$$

a) Engedjük el a mozgó pontot kezdősebesség nélkül ($v_0 = 0$). Az a pálya végéhez akkora sebességgel érkezik, mintha r_0 magasságból szabadon esett volna, ui. (10a)-ból, ha $v_0 = 0$ és $\varphi = 0^\circ$

$$v^2 = 2r_0g. \tag{11}$$

Ugyanez a helyzet, ha a sebességet a pálya tetszőleges φ szöghöz tartozó pontjában vizsgáljuk, ui. $r_0\cos\varphi$ a szabadeséssel megtett utat jelenti.

b) Legyen $v_0 > 0$. Ekkor a végsebesség

$$v^2 = 2r_0g + v_0^2.$$

Megjegyzés: A kísérletek a levezetett eredményekhez képest kisebb eltéréseket mutatnak, mivel a súrlódást nem vettük számításba. Mi a súrlódást azzal is csökkentettük, hogy a pálya sugaránál nagyobb sugarú gömbbel végeztük a kísérleteket, azaz a gömb a körpálya peremén haladt lefelé.

Dr. Tóth Lajos
egyetemi tanár