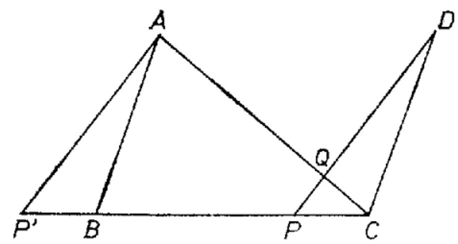
I. megoldás. Jelöljük az A, B, C, P, Q, pontok (és minden további pont) helyvektorát a megfelelő kis betűvel. Ekkor

$$\mathbf{p}=x\mathbf{b}+(1-x)\,\mathbf{c},\quad \mathbf{q}=\frac{x}{1+x}\,\mathbf{a}+\frac{1}{1+x}\,\mathbf{c}.$$



A PQ egyenest t: $(1-t)$ arányban osztó D pontra

$$\mathbf{d}=(1-t)\mathbf{p}+t\mathbf{q}=\frac{tx}{1+x}\,\mathbf{a}+(1-t)\,x\mathbf{b}+\left(1-x+\frac{x^2t}{1+x}\right)\mathbf{c}.$$

Olyan x-től függő t osztóviszonyt keresünk, amelyik mellett $\mathbf{d}$ független x-től, hiszen ekkor lesz a megfelelő D pont helyzete állandó. Ez így lesz akkor, ha $\mathbf{d}$ kifejezésében $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ együtthatója állandó lesz, azaz

$$\frac{tx}{1+x}=\alpha,\quad (1-t)\,x=\beta,\quad 1-x+\frac{x^2t}{1+x}=\gamma.$$

Ebből először is

$$\alpha x+1-x=\gamma$$

következik, ami állandó α, γ és változó x mellett csak $\alpha=\gamma=1$ esetén lehetséges. Tehát

$$t=\frac{1+x}{x},$$

és így $\beta=-1$, a PQ egyenes x megválasztásától független D pontjának a helyvektora

$$\mathbf{d}=\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}.$$

Ha origónak a B pontot választjuk, $\mathbf{b}=0$ és $\mathbf{d}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$, tehát a $\overrightarrow{BD}$ vektor a $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ vektorok összege, vagyis az A, B, C, D pontok (ebben a sorrendben) egy paralelogramma csúcsai.

II. megoldás. Toljuk el a P pontot a $\overrightarrow{CB}$ vektorral a P' helyzetbe. Így $PP'=CB$, és az előírt megválasztás szerint

$$\frac{CP}{PP'}=\frac{CP}{CB}=\frac{CQ}{QA},$$

és ismert tétel szerint PQ párhuzamos $P'A$-val.

Toljuk most vissza P'-t P-be, és toljuk vele a $P'BA$ háromszöget. Így a $P'A$ egyenes rájut a PQ egyenesre, BA a C-n átmenő, BA-val párhuzamos egyenesre és A új helyzete az a D pont, amelyre $CD\#BA$, vagyis az $ABCD$ paralelogramma negyedik csúcsa. Itt a PQ egyenes minden figyelembe veendő x érték mellett átmegy, az állítást bebizonyítottuk.

Németh Ágnes (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Bizonyításunk a CB egyenes minden P pontjára érvényes (kivéve mégis C-t), ha a szakaszoknak előjelet tulajdonítunk és Q-t ennek megfelelően választjuk az AC egyenesen.

2. Ajánljuk az érdeklődőknek annak a kapcsolatnak az átgondolását, ami fennáll tételünk és a „Z alakú szorzó-osztó nomogramok” között. (Lásd pl. Matematika, a mat. osztályok számára, III. köt., 433. old.)