(Kúpszeletek)

Ebben a rovatban havonta tíz-tíz olyan érdekes – könnyebb vagy nehezebb – feladatot mondunk el, amelyek előkészítőül szolgálnak a Matematikai Diákolimpiára. A feladatok megoldásait nem kérjük beküldeni, a megoldásokat sem fogjuk ismertetni. Az érdeklődők a feladatokkal kapcsolatos kérdéseikkel forduljanak a szerkesztőséghez. Leveleikre írásban válaszolunk.

1. Adott derékszögű háromszög síkjában keressük meg azokat a pontokat, amelyeknek a háromszög csúcsaitól mért távolságaival mint oldalakkal ismét derékszögű háromszöget szerkeszthetünk.

2. Adott egy k kör és a kör A és B pontjai. Rajzoljunk a k kört az A pontban érintő k_A kört és a B pontban érintő k_B kört úgy, hogy a k_A és k_B körök egymást is érintsék a P pontban. Mi a P érintési pontok mértani helye?

3. Tekintsük azt az ellipszist, amely az $ABCD$ téglalap oldalait a felezőpontjaikban érinti. Az ellipszis egy P pontjában húzott érintő messe az AD egyenest az F, az AB egyenest az E pontban. Legyenek az E és F pontok – a tengelypontoktól különböző vetületei az ellipszis szimmetriatengelyeire G és H. Igazoljuk, hogy a GP és HP egyenesek átmennek egy-egy ellipszis tengelyponton.

4. Egyenlő oldalú kúpból lemetszünk egy ellipszis alapú kúpot. Bizonyítsuk be, hogy az alapellipszis kistengelye a kúp legkisebb és legnagyobb alkotójának mértani közepe.

5. Mi a mértani helye azoknak a pontoknak, amelyekből adott parabola 45°-os szög alatt látszik?

6. Az ellipszist érintő téglalapok közül melyik a legnagyobb és melyik a legkisebb területű?

7. Jelölje A és B valamely hiperbola két tengelypontját és legyen a hiperbola egy pontja P. Igazoljuk, hogy az AP és BP egyenesek, valamint a hiperbola egyik aszimptotája által meghatározott háromszög P-ből induló súlyvonala párhuzamos a másik aszimptotával.

8. Adott az ABC szabályos háromszög körülírt körének A-tól és B-től különböző P pontja. Jelöljük az AP és BC egyenesek metszéspontját Q-val, az AC és BP egyenesek metszéspontját R-rel. Igazoljuk, hogy P-t változtatva az így kapott QR egyenesek a sík egy rögzített pontján mennek át.

9. Jelöljük az ellipszis fél nagytengelyét a-val, a fél kistengelye pedig legyen egységnyi. Rajzoljunk az ellipszis középpontja körül egységnyi sugarú k_1 kört. Van-e olyan k_2 kör, amelynek középpontja a nagytengelyen van, érinti a k_1 kört és az ellipszist, az utóbbit két pontban?

10. Az $ABCD$ téglalap oldalait osszuk fel $a:b$ arányban, mégpedig úgy, hogy

$$\frac{AA'}{A'B} = \frac{B'C}{B'B} = \frac{CC'}{C'D} = \frac{D'A}{D'D} = \frac{a}{b}.$$

Írjunk a téglalapba ellipszist, amely az oldalakat az A', B', C', D' pontokban érinti. Hányadrésze az ellipszis területe a téglalap területének?

Javasolt szakirodalom

Geometriai feladatok gyűjteménye II. kötet

Schopp János: Kúpszeletek (Középiskolai Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó, Bp.)

Hajós György: Bevezetés a geometriába (Egyetemi tankönyv)

Lukács Ottó: Koordinátageometria vektorokkal a síkban és térben (Középiskolai Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó, Bp.)