A Bolyai János Matematikai Társulat az idén is megrendezte az IMK szokásos téli ankétját 1978. december 27-én és 28-án.

A találkozón a következő előadások hangzottak el:

Pósa Lajos: Matematikai logikai kérdések.

Surányi János: Húr- és érintőnégyszögek.

Prékopa András: Lineáris programozás.

December 27-én du. a résztvevők feladatmegoldással foglalkoztak.

Az IMK téli ankétjának feladatai és megoldásai

1. *α és β jelentsen olyan hegyesszöget, amelyre* $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{27}}$ *és* $\sin\beta = \sqrt{\dfrac{3}{28}}$. *Bizonyítsuk be, hogy* $\alpha+\beta = 30°$.

Megoldás. Ha β hegyesszög, akkor $0 < \cos\beta < 1$, ezért $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ alapján $\cos\beta = \sqrt{1-\dfrac{3}{28}} = \dfrac{5}{\sqrt{28}}$, vagyis $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

Ezekből $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$-t ki tudjuk számítani:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Mivel α és β hegyesszög, ezért $\alpha+\beta$ $0°$ és $180°$ közé esik. Ebben az intervallumban pedig $30°$ az egyetlen olyan érték, amelynek a tangense $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Tehát $\alpha+\beta = 30°$.

2. *Az ABC szabályos háromszög AB, ill. CA oldalán vegyük fel azt a C', ill. B' pontot, amelyekre $AC' = CB' = \dfrac{AB}{3}$. A BB' és CC' szakaszok közös pontja legyen P. Bizonyítsuk be, hogy APB derékszög.*

Megoldás. Két nem nullvektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor által bezárt szög derékszög.

Legyen A' az AP szakasz meghosszabbításának BC-vel való metszéspontja. Ekkor a bizonyítandó állítás ekvivalens az $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{BB'} = \mathbf{0}$ állítással. Legyen egységnyi hosszú a háromszög egy-egy oldala. Ekkor $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = 1$, valamint tudjuk, hogy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \mathbf{0}$, és $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

Ceva tételének megfordításából $\dfrac{BA'}{A'C} = 4$, azaz $\overrightarrow{BA'} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$. Ebből $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$. Most tekintsük $\overrightarrow{AA'}$ és $\overrightarrow{BB'}$ skaláris szorzatát:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{BB'} &= \left(\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\right) = \\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC^2}+\frac{4}{15}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} = \\ &= \cos 120° + \frac{1}{3}\cos 120° + \frac{4}{5} + \frac{4}{15}\cos 120° = 0.\end{aligned}$$

(Itt felhasználtuk a skaláris szorzás tulajdonságait, valamint azt, hogy a vektorok abszolút értéke 1.)

Az, hogy ennek a két vektornak szorzata 0, azt jelenti, hogy az általuk bezárt szög derékszög, ez pedig éppen az APB szög.

3. *Legyenek a, b és c pozitív egész számok. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ csak akkor racionális, ha a, b és c négyzetszámok.*

Megoldás. Ha volnának olyan a, b, c egészek, amelyekre $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ racionális, akkor olyanok is volnának, melyekre $d = \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ egész szám. Megmutatjuk, hogy ez nem lehetséges. A $\sqrt{a}+\sqrt{b} = d-\sqrt{c}$ mindkét oldalát négyzetre emelve, majd átrendezve

$$\sqrt{4ab} = d^2+c-a-b-\sqrt{4d^2c},$$

innen újból négyzetre emelve

$$\sqrt{c}\cdot 4\cdot d(d^2+c-a-b) = (d^2+c-a-b)^2 - 4\cdot ab + 4\cdot d^2c.$$

Ez pedig csak akkor lehet, ha c négyzetszám vagy ha $d(d^2+c-a-b) = 0$. Ez utóbbi nem lehet, mert $d > 0$, és $d^2+c-a-b = \sqrt{4ab}+\sqrt{4d^2c} > 0$. Tehát c négyzetszám. A föntiek elmondhatók a-ra és b-re is, amivel az állítást igazoltuk.

4. *Az a, b és c olyan pozitív egész számok, amelyekre a és c, valamint b és c relatív prímek. Mutassuk meg, hogy az*

$$x^a + y^b = z^c$$

egyenletnek végtelen sok egész megoldása van.

Megoldás. Vegyük észre, hogy ha $x = u(u^a + v^b)^{br}$, $y = v(u^a + v^b)^{ar}$, $z = (u^a + v^b)^s$, és $abr + 1 = cs$, akkor minden u, v párra a fenti x, y, z kielégíti az $x^a + y^b = z^c$ egyenletet.

Csak az a kérdés, hogy van-e olyan v és s, amikre $abr + 1 = cs$. Igen, mindig van, mert $(a, c) = (b, c) = 1$, tehát $(a \cdot b, c) = 1$. Így ha r fut 1-től c-ig, $a \cdot b \cdot r$ teljes maradék rendszert ad c-re nézve, tehát lesz olyan r is, amire $a \cdot b \cdot r = c \cdot x + c - 1$, így $a \cdot b \cdot r + 1 = c(x + 1) = cs$.

5. *Az ABC háromszög belsejének P olyan pontja, amelyre $PAB\sphericalangle = PBC\sphericalangle = PCA\sphericalangle = \omega$. Bizonyítsuk be, hogy $\omega \leq 30°$.*

Megoldás. Tegyük fel, hogy $\omega > 30°$, ebből ellentmondásra fogunk jutni. Legyen $PA = x$, $PB = y$ és $PC = z$. Mivel $\sin\omega > \dfrac{1}{2}$, azért

$$\begin{aligned} z &= a\frac{\sin\omega}{\sin\gamma} > \frac{a}{2\sin\gamma}, \\ x &= b\frac{\sin\omega}{\sin\alpha} > \frac{b}{2\sin\alpha}, \\ y &= c\frac{\sin\omega}{\sin\beta} > \frac{c}{2\sin\beta}. \end{aligned}$$

Ezek a BCP, CAP, ABP háromszögre felírt szinusztételből következnek. A háromszög t területére:

$$\begin{aligned} 2t &= xy\sin\beta + xz\sin\alpha + yz\sin\gamma \\ 8t &> \frac{bc}{\sin\alpha} + \frac{ab}{\sin\gamma} + \frac{ac}{\sin\beta}, \\ 8t &> \frac{2t}{\sin^2\alpha} + \frac{2t}{\sin^2\beta} + \frac{2t}{\sin^2\gamma}, \\ 4 &> \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} = \frac{4R^2}{a^2} + \frac{4R^2}{b^2} + \frac{4R^2}{c^2}. \end{aligned}$$

Itt R a körülírt kör sugara. Legyen $R = 1$, a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből

$$1 > \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}}.$$

Mivel $abc = 4Rt = 4t$, továbbá az egységsugarú körbe írható maximális területű háromszög az egyenlő oldalú, s ennek területe $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, vagyis $t \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, azért

$$1 > \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{16t^2}} \geq 1.$$

Ellentmondásra jutottunk, ebből következik, hogy valóban $\omega \leq 30°$.

6. *Képezzük a következő sorozatot: $x_1 = a$ (tetszőleges valós), $x_{n+1} = a(x_1 \pm \pm 1)$, a pozitív vagy negatív előjel minden lépésnél szabadon választható. Bizonyítsuk be, hogy ha a sorozat valamelyik eleme $+1$ vagy -1, akkor $|a| < 2$.*

Megoldás. Tegyük fel, hogy $|a| \geq 2$. Teljes indukcióval belátjuk, hogy ekkor $|x_i| \geq 2$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots)$. Ha $|x_i| \geq 2$, akkor $|x_i \pm 1| \geq 1$, bármelyik előjelet választjuk, és ekkor $|x_{i+1}| = |a(x_i \pm 1)| = |a| \cdot |x_i \pm 1|$, ami viszont nyilvánvalóan nagyobb vagy egyenlő, mint 2, hiszen $|a| \geq 2$. Ekkor azonban a sorozatnak nem lehet $+1$ vagy -1 tagja, tehát eredeti feltevésünk hamis, azaz $|a| < 2$.