Ebben a rovatban havonta tíz-tíz olyan érdekes – könnyebb vagy nehezebb – feladatot fogunk elmondani, amelyek a Matematikai Diákolimpiára előkészítőül szolgálnak. A feladatok megoldását nem kérjük beküldeni, és a megoldásokat sem fogjuk ismertetni. Az érdeklődők a feladatmegoldásokkal kapcsolatos mindennemű kérdésükkel forduljanak a szerkesztőséghez. A kérdésekre levélben válaszol a rovatvezető.

Összefüggések a háromszög adatai között

A feladatokban a háromszög adataira a szokásos jelöléseket alkalmazzuk. A háromszög csúcsai A, B, C; a csúcsoknál levő szögek rendre α, β, γ; a magasságpont M; a csúcsokból induló magasságvonalak hossza m_a, m_b és m_c. A háromszög kerülete $2s$, a körülírt kör sugara r, a beírt kör sugara ϱ, végül az A-ból induló belső szögfelező a BC oldalt G-ben metszi.

Bizonyítsuk be az alábbiakat:

1. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{\varrho}{s}$.

2. $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}=\dfrac{2r}{\varrho}$.

3. Hegyesszögű háromszögben a talpponti háromszög (a magasságok talppontjai által meghatározott háromszög) kerülete $\dfrac{2\varrho s}{r}$.

4. $\dfrac{AB}{CM}+\dfrac{BC}{AM}+\dfrac{CA}{BM}=\dfrac{AB\cdot BC\cdot CA}{CM\cdot AM\cdot BM}$

5. $AG^2=AB\cdot AC-GB\cdot GC$

6. $AM\cdot BM\cdot CM\leq\dfrac{8}{27}m_a\cdot m_b\cdot m_c$

7. $2\varrho\leq r$

8. $2s\leq 3\sqrt{3}r$

9. $m_a+m_b+m_c\geq 9\varrho$

10. Hegyesszögű háromszögben a talpponti háromszög minimális kerületű a beírt háromszögek között.