I. rész

1. *a)* $A = 101^{100^{99}}$, $B = 99^{100^{101}}$. *Melyik szám a nagyobb, A vagy B?* (*7 pont*)

b) Írja föl az $f(x) = x^2$ *függvény azon érintőjének az egyenletét, amelyik az x-tengely pozitív félegyenesével* $60°$*-os szöget zár be.* (*6 pont*)

Megoldás. *a)* A tízes alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növő, ezért elegendő a számok logaritmusát összehasonlítani. 1 pont

$A_1 = \lg A = 100^{99} \cdot \lg 101$,
$B_1 = \lg B = 100^{101} \cdot \lg 99$.
A_1 és B_1 pozitív számok, így összehasonlításukhoz ismét a logaritmusukat hasonlítjuk össze. 3 pont

(Ha a vizsgázó hatványozott hatványként pl. $A = 101^{100 \cdot 99}$-cel dolgozik, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat a feladatra.)

$\lg A_1 = 99 \cdot \lg 100 + \lg(\lg 101) = 198 + \lg(\lg 101) < 198 + \lg 10 = 199$,
$\lg B_1 = 101 \cdot \lg 100 + \lg(\lg 99) = 202 + \lg(\lg 99) > 202$.
$\lg A_1 < \lg B_1 \iff A_1 < B_1 \iff A < B$. 3 pont

Összesen: 7 pont

b) A keresett érintő meredeksége $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$. 1 pont
A függvény deriváltja $f'(x) = 2x$. 1 pont

Az érintési pont első koordinátája a $2x = \sqrt{3}$ egyenletből $\frac{\sqrt{3}}{2}$, a második koordináta $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{4}$. 3 pont

A keresett érintő egyenlete:

$$y = \sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3}{4} = \sqrt{3}x - \frac{3}{4}.$$ 1 pont

Összesen: 6 pont

2. *Hol a hiba az alábbi okoskodásokban? Mi az egyenlet megoldása az a) esetben és mennyi a szóban forgó valószínűség a b) kérdésben?*

a) A $\sqrt{x} = -x$ *egyenletnek nincs megoldása, mert egy szám négyzetgyöke nem lehet negatív.* (*4 pont*)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy hét szabályos kockát feldobva van 1-es a számok között? Annak a valószínűsége, hogy egyetlen szabályos kockával 1-est dobunk, $\frac{1}{6}$*. Eszerint annak a valószínűsége, hogy két szabályos kockát feldobva van 1-es a kijött számok között, kétszer ennyi,* $\frac{1}{3}$*; így tehát a kérdéses valószínűség 7-szer ennyi,* $\frac{7}{6}$*, az esemény bekövetkezése több, mint bizonyos.* (*5 pont*)

c) Egy méter 100 centiméter, tehát $\frac{1}{4}$ *méter = 25 centiméter. Az* $\frac{1}{4}$ *négyzetgyöke* $\frac{1}{2}$*, a 25 négyzetgyöke 5, tehát* $\frac{1}{2}$ *méter = 5 centiméter.* (*4 pont*)

Megoldás. *a)* $-x$ nem negatív, ha $x \le 0$. 2 pont
Az egyenlet megoldása a 0. 2 pont
(Ha a vizsgázó azt írja, hogy az indoklás azért hibás, mert az egyenletnek van megoldása, akkor legfeljebb 1 pontot kaphat.)

Összesen: 4 pont

b) A siker valószínűsége nem egyenesen arányos a kísérletek számával. 2 pont

Annak valószínűsége, hogy nincs 1-es a számok között: $\left(\frac{5}{6}\right)^7$, ezért a szóban forgó valószínűség értéke $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0{,}7209$. 3 pont

(Akkor is jár a 3 pont, ha a vizsgázó nem hivatkozik a binomiális eloszlásra. Ha 1-et közöl eredményként, akkor legfeljebb 1 pontot kaphat.)

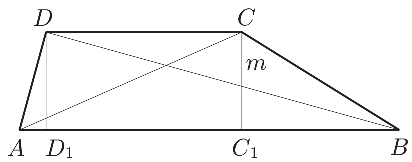
Összesen: 5 pont

c) Egy mennyiség mértéke a mérőszámnak és az egységnek a szorzata. A mérőszámokból vont négyzetgyökvonás akkor vezet igaz egyenlőséghez, ha mindkét oldalon ugyanaz az egység. 4 pont

Összesen: 4 pont

3. *Egy trapéz magassága, egyik, illetve másik átlója ebben a sorrendben egy $q = 2$ hányadosú mértani sorozat három szomszédos tagja. A trapéz területe $T = \sqrt{60} + \sqrt{12}$ területegység. Mekkora a trapéz magassága?* (*12 pont*)

Megoldás. Legyenek a trapéz csúcsai $ABCD$, a magassága m. A feltétel szerint $AC = 2m$, $BD = 4m$. Legyen a C és a D vetülete az AB oldalon C_1 és D_1. 2 pont



Pithagorasz tétele szerint $AC_1 = \sqrt{3}\,m$ és $BD_1 = \sqrt{15}\,m$. 2 pont

Mivel $C_1D_1 = CD$, azért a trapéz alapjainak összege:

$$AB + CD = AC_1 + BD_1 = \sqrt{3}\,m + \sqrt{15}\,m = \sqrt{3}\,m\left(1 + \sqrt{5}\,\right).$$ 5 pont

A trapéz kétszeres területe:

$$\sqrt{3}\,m\left(1 + \sqrt{5}\,\right) \cdot m = 2\left(\sqrt{60} + \sqrt{12}\,\right).$$

Innen $m^2 = 4$, azaz $m = 2$. 3 pont

Összesen: 12 pont

4. *Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:*

a) $2x^4 \le x^2 + 1$. (*5 pont*)

b) $2\cos^2 x \ge \cos x + 1$. (*8 pont*)

Megoldás. *a*) A $t = x^2 \ge 0$ új változó bevezetésével az egyenlőtlenség $2t^2 - t - 1 \le 0$ alakba írható. 2 pont

Ennek a megoldása: $-\dfrac{1}{2} \le t \le 1$. 2 pont

(A grafikus megoldásért is jár a 2 pont.)

Mivel $t \ge 0$, a megoldás $0 \le x^2 \le 1$, azaz $-1 \le x \le 1$. 1 pont

Összesen: 5 pont

b) Most a $t = \cos x$ $(-1 \le t \le 1)$ helyettesítés után a $2t^2 - t - 1 \ge 0$ egyenlőtlenséget kapjuk. 2 pont

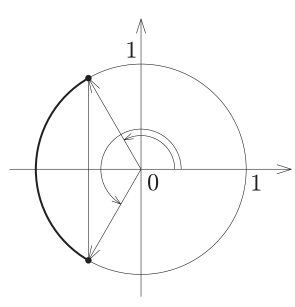
(1 pont akkor is jár, ha a vizsgázó később jelöli ki az új változó értékkészletét.)

Ennek a megoldása: $t \le -\dfrac{1}{2}$ vagy $1 \le t$. 1 pont

Ha $\cos x = t \le -\dfrac{1}{2}$, akkor $\cos x \le -\dfrac{1}{2}$, azaz

$$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \text{ egész.}$$ 3 pont

(Ha a vizsgázó fokokban adja meg a megoldást, akkor 2 pontot, ha keverve, vagy nem írja a periódust, akkor 1 pontot kaphat.)



Ha $1 \le t = \cos x$, akkor $\cos x = 1$, tehát $x = 2n\pi$, ahol n egész. 2 pont

Összesen: 8 pont

II. rész

5. *a) A pozitív egész A és B számok összege 1000. Igazolja, hogy A^2 utolsó három számjegye egyenlő B^2 utolsó három számjegyével.* (*4 pont*)

b) Adjon meg olyan pozitív egész A és B számokat, amelyek összege 1000 és A^2 utolsó négy *számjegye egyenlő B^2 utolsó* négy *számjegyével.* (*3 pont*)

c) Hány pozitív osztója van a $H = 2^{24} - 1$ számnak? (*9 pont*)

Megoldás. *a*) Az állítás akkor teljesül, ha $1000 \mid A^2 - B^2$. 2 pont
$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B) = 1000(A-B)$, tehát az állítás igaz. 2 pont
(Másik megoldás.) $B = 1000 - A$, tehát

$$B^2 = (1000 - A)^2 = (1000^2 - 2000A) + A^2.$$ 2 pont

$1000 \mid 1000^2 - 2000A$, így B^2 és A^2 utolsó három jegye megegyezik. 2 pont

Összesen: 4 pont

b) Az utolsó 4 számjegy akkor egyezik meg, ha $10\,000 \mid A^2 - B^2$. 1 pont
Így $(A-B)$-nek oszthatónak kell lennie 10-zel. Az $A + B = 1000$ feltétel esetén ez például teljesül, ha A is és B is osztható 10-zel. Egy példa: $A = 110$, $B = 890$. 2 pont

Összesen: 3 pont

c) Bontsuk a H számot prímtényezők szorzatára, ehhez pedig alakítsunk szorzattá:

$$H = (2^{12} - 1)(2^{12} + 1) = (2^6 - 1)(2^6 + 1)\big((2^4)^3 + 1\big) =$$

$$= (2^3 - 1)(2^3 + 1)(2^2 + 1)(2^4 - 2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 - 2^4 + 1).$$ 4 pont

(A 4 pont akkor is jár, ha a vizsgázó akkora tényezőkig jut a felbontásban, amelyek már kézzel „kezelhetők”, illetve ha tovább bont.)
Behelyettesítve: $H = 7 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 241$. Innen a törzstényezős felbontás:
$H = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 241$. 2 pont
Innen a H pozitív osztóinak a száma:
$d(H) = (2+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 96$. 3 pont

Összesen: 9 pont

6. *Egy dobozban pénzérmék és golyók vannak, amelyek ezüstből vagy aranyból készültek. A dobozban lévő tárgyak 20%-a golyó, a pénzérmék 40%-a ezüst, az aranytárgyak 80%-a érme.*
a) A dobozban lévő tárgyak hány százaléka arany pénzérme? (*4 pont*)

b) A dobozból véletlenszerűen kihúzunk egy tárgyat. Mekkora a valószínűsége, hogy ez a tárgy ezüstből készült? (*4 pont*)

c) A dobozból véletlenszerűen kihúzunk egy golyót. Mekkora a valószínűsége, hogy ez a golyó ezüstből készült? (*4 pont*)

d) Értelmezze a b) és a c) feladatok eredményét a következő eseményekre: E: a kihúzott tárgy ezüstből van; G: a kihúzott tárgy golyó. (*4 pont*)

Megoldás. Jelölje t a tárgyak számát és foglaljuk táblázatba az adatokat: a táblázat kitöltésekor használjuk föl, hogy a sor-, illetve oszlopösszegek összege a tárgyak száma. 6 pont

	Golyó	Érme	Össz.
Arany	$0{,}12t$	$0{,}48t$	$0{,}6t$
Ezüst	$0{,}08t$	$0{,}4\cdot 0{,}8t=0{,}32t$	$0{,}4t$
Össz.	$0{,}2t$	$0{,}8t$	t

(Ha a táblázat helyes, akkor az *a*), *b*), *c*) kérdések helyes megoldására még 2–2 pont adható. Az egyes részfeladatok megoldásakor halmazábra is használható, akkor 2–2 pont jár egy-egy részfeladat helyes ábrázolásáért.)

a) 48%. 2 pont

b) 0,4. 2 pont

c) 0,4. 2 pont

d) Az eredmények szerint az ezüst tárgyak aránya a golyók között azonos az ezüst tárgyak arányával a dobozban: az E és a G események *függetlenek.* 4 pont

(Másféle indoklás is elfogadható a két esemény függetlenségére; pl. $\mathrm{P}(EG)=\mathrm{P}(E)\cdot\mathrm{P}(G)$, vagy $\mathrm{P}(E\mid G)=\mathrm{P}(E)$.)

Összesen: 16 pont

7. *Egy számtani sorozat első tagja* 9, *a kilencedik tagja pedig* 33.

a) *Határozza meg a fenti számtani sorozat azon tagjainak az összegét, amelyek* 149 *és* 301 *között vannak.* (*10 pont*)

b) *Mennyi a sorozat első huszonöt elemének a négyzetösszege?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) $d=\dfrac{a_9-a_1}{9-1}=3.$ 2 pont

$a_n=a_1+(n-1)d=3n+6.$ 1 pont

A sorozat n-edik tagja akkor esik 149 és 301 közé, ha

$$149<3n+6<301, \quad \text{azaz} \quad \frac{143}{3}<n<\frac{295}{3},$$

ami akkor és csak akkor teljesül, ha $47<n<99$. 3 pont

A sorozatnak összesen $98-47=51$ tagja esik a megadott határok közé. A legkisebb $a_{48}=150$, a legnagyobb $a_{98}=300$. 2 pont

$$a_{48}+\ldots+a_{98}=51\cdot\frac{a_{48}+a_{98}}{2}=11\,475.$$ 2 pont

Összesen: 10 pont

b) $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{25}^2=\sum\limits_{i=1}^{25}(3i+6)^2=9\sum\limits_{i=1}^{25}(i+2)^2.$ 2 pont

$\sum\limits_{i=1}^{25}(i+2)^2$ az első 27 pozitív egész négyzetösszegénél 5-tel kisebb. 2 pont

Az ismert összefüggés szerint:

$$\sum_{n=1}^{27}n^2=\frac{27\cdot 28\cdot 55}{6}=6930,$$

tehát a keresett összeg $9\cdot 6925=62\,325$. 2 pont

Összesen: 6 pont

(Akkor is jár a 6 pont, ha a vizsgázó az összegzés előtt végzi el a négyzetre emelést. Ekkor a számolás:

$$\sum_{i=1}^{25}(3i+6)^2=\sum_{i=1}^{25}9i^2+\sum_{i=1}^{25}36i+\sum_{i=1}^{25}36=49\,725+11\,700+900=62\,325.)$$

8. *Egy klinikán olyan betegség kimutatására végeznek vérvizsgálatot, amelyikben száz ember közül átlagosan egy szenved. A vizsgálati személyek ötvenes csoportokban érkeznek és az eddigi gyakorlat szerint egyesével végzik el rajtuk a tesztet. Egyetlen vérminta vizsgálata* 300 *forintba kerül.*

A klinika vezetője két módosító javaslatot kapott:

A) *Egy-egy* 50-*es csoport vérmintáinak egy részét azonosítható módon tegyék félre, a másik részeket pedig öntsék össze és vizsgálják először a csoportos mintát. Ha ez negatív, akkor nyilván mindenki egészséges, ha pozitív, akkor a félretett egyéni mintákat vizsgálják egyesével.*

B) Az A) javaslathoz hasonlóan először az 50-es csoport együttes vérmintáját vizsgálják meg. Ha ez pozitív, akkor minden egyes félretett egyéni minta feléből két 25-fős, csoportos mintát készítenek és ezeket ismét együttesen vizsgálják. Ha bármelyik csoport pozitívnak bizonyul, akkor annak a csoportnak a tagjait egyesével szűrik.

A klinika vezetőjeként változtatna-e az addigi gyakorlaton? Ha igen, akkor hogyan és miért? (*16 pont*)

Megoldás. Annak a valószínűsége, hogy egy ember beteg, 0,01 és az egyes emberek egymástól *függetlenül* betegek vagy sem. 1 pont

(Ez az 1 pont nem jár, ha a vizsgázó nem említi a függetlenséget.)

Az eredeti eljárás szerint egy 50-es minta vizsgálati költsége $50 \cdot 300 = 15\,000$ Ft. 1 pont

Az A és a B változatok esetén a költségek *várható értékét* határozzuk meg és hasonlítjuk össze. 2 pont

A) Annak a valószínűsége, hogy egy 50-es mintában *nincs* beteg, $p = 0{,}99^{50} \approx 0{,}605$, annak, hogy van, $1-p \approx 0{,}395$. 2 pont

Az A) változat költségének várható értéke tehát: $E_A = p \cdot 300 + (1-p) \cdot 51 \cdot 300 \approx 6225$ Ft. 3 pont

B) Annak a valószínűsége, hogy egy 25 fős mintában nincs beteg: $p_1 = 0{,}99^{25} \approx 0{,}778$. 1 pont

A két 25 fős minta esetén a lehetőségek a megfelelő valószínűségekkel:

– mindkét csoport egészséges: $p_1^2 = p \approx 0{,}605$.

– egy csoport egészséges: $2p_1 \cdot (1-p_1) \approx 0{,}345$.

– mindkét csoport beteg: $(1-p_1)^2 \approx 0{,}05$. 3 pont

(Ha a kerekítés miatt nem 1 az összeg, akkor 2 pont, ha elvi hiba van, akkor maximum 1 pont.)

A szükséges tesztek száma az egyes esetekben: 2; 27; 52. A vizsgálat költségének várható értéke:

$$E_B = 300[2 \cdot 0{,}605 + 27 \cdot 0{,}345 + 52 \cdot 0{,}05] \approx 3937{,}5 \text{ Ft}.$$ 2 pont

A B) változatot érdemes választani. 1 pont

Összesen: 16 pont

9. *Az alábbi feladatok megoldása során kalkulátor* nem *használható. Eredményeit indokolja.*

a) 1. *Írja föl az* $(1+x)^{10}$ *hatvány kifejtésének első négy tagjának összegét az* x *növekvő hatványai szerint rendezve.* (*2 pont*)

2. *A talált kifejezés alapján adjon közelítést* $1{,}005^{10}$ *értékére.* (*1 pont*)

3. *Igazolja, hogy az így kapott közelítés négy tizedesjegyre pontos.* (*5 pont*)

b) 1. *Ábrázolja az* $f(x) = \dfrac{1500x+1}{500x-2}$ *függvény grafikonját, ha* $x > 1\,000$. (*2 pont*)

2. *Határozza meg az*

$$\frac{1500x+1}{500x-2} = \frac{3x}{10\,000}$$

egyenlet pozitív megoldásának az egész részét. (*6 pont*)

Megoldás. *a*)

$$(1+x)^{10} \to 1 + 10x + \binom{10}{2}x^2 + \binom{10}{3}x^3 = 1 + 10x + 45x^2 + 120x^3.$$ 2 pont

Ennek alapján

$$1{,}005^{10} = (1+0{,}005)^{10} \approx 1 + 10 \cdot 0{,}005 + 45 \cdot 0{,}000\,025 + 120 \cdot 0{,}000\,000\,125 = 1{,}05114.$$ 1 pont

A további 7 tagot felülről becsülhetjük, felhasználva, hogy a szereplő binomiális együtthatók maximuma $\binom{10}{5} = 252$ és $x = 0{,}005$ hatványai fogynak. Így mindegyikük legfeljebb $252x^4$, az összegük kisebb, mint

$$7 \cdot 252 \cdot \left(5 \cdot 10^{-3}\right)^4 < 10^{-8} \cdot 1764 < \frac{10^{-4}}{2}.$$

Az első négy tag összege tehát négy tizedesre pontos. 5 pont

(Más helyes becslés is elfogadható.)

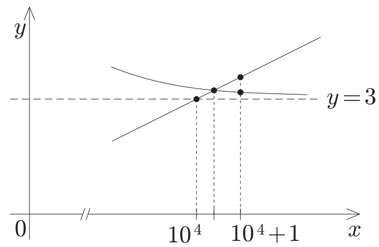
Összesen: 8 pont

b) A függvény grafikonja megkülönböztethetetlen a vízszintes aszimptotától, melynek egyenlete $y = 3$.

Emellett ha $x > \dfrac{1}{250}$, akkor $f(x) > 3$. 3 pont

(Akkor is jár ez a 3 pont, ha a vizsgázó csak a következő részben említi, hogy a függvény itt az aszimptota fölött halad.)

Ha az adott egyenlet helyett a $3 = \dfrac{3x}{10\,000}$ egyenletet oldjuk meg, akkor mivel $\dfrac{1500x+1}{500x-2} > 3$, másfelől a jobb oldali függvény növő, a módosított egyenlet megoldása, 10 000, a valódi megoldásnál kisebb. 3 pont



Másfelől egyszerű számolással kapjuk, hogy ha x helyébe 10 001-et írunk, akkor az eredeti egyenlet jobb oldala nagyobb lesz, mint a bal, a pozitív gyök tehát kisebb, mint 10 001, így az egész része 10 000. 2 pont

(Ha a vizsgázó az aszimptota megállapítása után közli, hogy a gyök egész része 10 000, kaphat 1 pontot. Grafikusan csak annyi fogadható el, hogy a gyök nagyobb, mint 10 000.)

Összesen: 8 pont