

I. rész

1. Egy derékszögű háromszögben a két befogó hosszának aránya $1 : 2$, továbbá a kerület és terület mérőszámai egyenlők. Határozzuk meg az átfogóhoz tartozó magasság hosszának pontos értékét. (11 pont)

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\left. \begin{aligned} x^2 - y^2 - 6x - 6y &= 0 \\ xy - x + y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12 \text{ pont})$$

3. Egy egyfordulós röplabdakupán – ahol tehát bármely két csapat pontosan egyszer játszik egymással – 30 lejátszott mérkőzés után még minden csapatnak három mérkőzése volt hátra. Hány csapat szerepelt a kupán? (14 pont)

4. Egy üzem termelése öt egymást követő évben mindig nőtt, az első évben 12, a másodikban 15, a harmadikban 20%-kal. A negyedik és az ötödik évben a növekedés százaléka azonos volt. Az ötödik évben az üzem a vizsgált időszakot megelőző év termelésének 2,3-szeresét érte el. Hány százalékkal növekedett a termelés a negyedik és az ötödik évben? (14 pont)

II. rész

5. a) Az $x^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei 2-vel nagyobbak, mint az $x^2 + cx + b = 0$ egyenlet gyökei. Számítsuk ki b és c értékét.

b) Az $x^2 + bx + c = 0$ egyenlet egyik gyöke 6, a másik gyöke egyenlő az egyenlet diszkriminánsával. Számítsuk ki b és c értékét.

c) Az $x^2 + bx + c$ másodfokú polinom két zérushelye x_1 és x_2 . Írjunk fel olyan harmadfokú polinomot, amelynek zérushelyei: $x_1 + x_2$; $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$; $x_1^3 + x_2^3$. (16 pont)

6. Oldjuk meg a $(4 - \cos 8x)(2 + \cos 2x) = 15$ egyenletet. (16 pont)

7. a) Egy 27 fős osztályba 5-tel több lány jár, mint fiú. Mekkora a valószínűsége, hogy véletlenszerűen kiválasztott három tanuló között két fiú és egy lány van?

b) Egy 27 fős osztályból kiválasztunk két tanulót. Határozzuk meg az osztályban a fiúk számát úgy, hogy a legnagyobb valószínűsége legyen annak, hogy a kiválasztott tanulók különböző neműek. Mekkora ez a maximális valószínűség?

c) A 27 fős 11. osztályban egy rosszul sikerült matematika dolgozat átlaga pontosan 2. Az 5-ös, 4-es, 3-as osztályzatok száma egyenlő és azt is tudjuk, hogy valamennyi érdemjegy előfordult. Mennyi lehet az osztályzatok módusza és a mediánja? (16 pont)

8. Egy harmadfokú $f(x)$ függvényről tudjuk, hogy $f(1) = f(3) = 4$, a harmadfokú tag együtthatója 1, továbbá $\int_1^5 f(x) dx = 16$. Írjuk fel a függvénygörbe érintőjének egyenletét a 4 abszcisszájú pontjában. (16 pont)

9. Adottak az $ABCD$ konvex négyszög három csúcsának koordinátái: $A(2; 3)$, $B(-2; 5)$, $C(-3; -2)$, továbbá a D csúcsonál lévő belső szöge, ami 90° .

a) Számítsuk ki az ABC háromszög területét.

b) Határozzuk meg a D csúcs koordinátáit úgy, hogy az $ABCD$ négyszög területe maximális legyen.

c) Mekkora az $ABCD$ négyszög kerülete, ha a D pont illeszkedik az x tengelyre? (16 pont)