A múlt havi számunkban közreadtuk a 2004. évi KöMaL Ankét totó-kérdéseit. A helyes válasz:

$$1,2,2, \quad 2,2,2, \quad \mathrm{X},1,1, \quad 2,\mathrm{X},1, \quad 2,\mathrm{X}.$$

Telitalálatos szelvényt adott be és könyvjutalmat kapott *Paulin Roland* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. évf.), *Pálinkás Csaba* (Szolnok, Verseghy F. Gimn., 12. évf.) és *Horváth Márton* (ELTE TTK matematikus hallgató).

Az alábbiakban rövid útmutatást adunk a totóban szereplő feladatok megoldásához.

1. *Egy sorozat első tagja* 439. *Minden további tag az előző tag számjegyei összegének a* 13*-szorosa. Mennyi a sorozat* 99*-edik eleme?* 130 (1); 169 (2); 143 (X).

Megoldás. A helyes válasz: (1). A sorozat első néhány tagját felírva:

$$\underbrace{439}_{16} \to \underbrace{208}_{10} \to \underbrace{130}_{4} \to \underbrace{52}_{7} \to \underbrace{91}_{\mathbf{10}} \to \mathbf{130}.$$

A sorozat periodikus, a 3-mal osztható sorszámú elemek értéke 130.

2. *Két egyforma, négyzet alapú téglatest alakú edénybe egyforma tömegű vizet, illetve étolajat öntünk. Melyik esetben nagyobb az oldallapokra ható erő? A víznél* (1); *az étolajnál* (2); *egyforma* (X).

Megoldás. A helyes válasz: (2). Az edény fenéklapjánál a nyomás mindkét esetben ugyanakkora (nevezetesen a folyadék súlyának és a négyzet területének hányadosa). Az egyes oldallapokra ható átlagos nyomás (a fenéknyomás fele) ugyancsak független a folyadék sűrűségétől. Eszerint valamelyik kiszemelt oldallapra ható erő az oldallap folyadékkal érintkező részének területével arányos; ez pedig (a víznél kisebb sűrűségű) étolaj esetében nagyobb.

3. *Tekintsük azokat az egész együtthatós ax^2+bx+c másodfokú polinomokat, amelyeknek van két különböző valós gyökük a $(0;1)$ nyílt intervallumban. Ekkor $|a|$ minimális értéke* 4 (1); 5 (2); 6 (X).

Megoldás. A helyes válasz: (2). Legyenek egy ilyen tulajdonságú polinom gyökei x_1 és x_2. Ekkor

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2).$$

$P=f(0)\cdot f(1)=a^2x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)$. Mivel $t(1-t)\le \frac{1}{4}$, ha $0<t<1$ és pontosan akkor van egyenlőség ha $t=\frac{1}{2}$, továbbá a feltétel szerint $x_1\ne x_2$, azért $0<P<\frac{a^2}{16}$ $(a>0)$.

Mivel P egész, azért az alsó korlát legalább 1, így $16<a^2$, tehát a legalább 5.

Az $f(x)=5x^2-5x+1$ példa mutatja, hogy a talált korlát éles.

4. *Egy foton energiája megegyezik egy elektron mozgási energiájával. Melyik részecskének nagyobb a lendülete? A fotonnak* (1); *az elektronnak* (2); *csak további adatok ismeretében lehet eldönteni* (X).

Megoldás. A helyes válasz: (2). A foton E energiája és p_f impulzusa (lendülete) között $E=p_\mathrm{f}c$ a kapcsolat (c a fénysebesség).

Ha az elektron nemrelativisztikusan ($v\ll c$ sebességgel) mozog, akkor a mozgási energiája $E=\frac{mv^2}{2}$, és az impulzusa

$$p_\mathrm{e}=mv=\frac{2}{v}E=\frac{2c}{v}p_\mathrm{f}>p_\mathrm{f}.$$

Az elektron lendülete akkor is nagyobb a megfelelő fotonénál, ha a részecske mozgása a relativisztikus tartományba esik. Ilyenkor a teljes (nyugalmi + mozgási) energia és a lendület között

$$\left(E+mc^2\right)^2=(p_\mathrm{e}c)^2+\left(mc^2\right)^2$$

a kapcsolat, ahonnan

$$p_\mathrm{e}^2=p_\mathrm{f}^2+2mc\cdot p_\mathrm{f},$$

és mivel a jobb oldal második tagja pozitív, $p_\mathrm{e}>p_\mathrm{f}$.

5. *Hányféleképpen lehet egy konvex tízszöget* 8 *háromszögre felbontani?* 800 (1); 1430 (2); 1440 (X).

Megoldás. A helyes válasz: (2). Nem nehéz megmutatni, hogy ha egy konvex n-szöget $n-2$ háromszögre bontunk fel, akkor a felbontás egymást nem metsző átlók segítségével történik, a háromszögek csúcsai a sokszög csúcsai is egyben. Jelölje az ilyen felbontások számát A_n. Nyilván $A_3=1$ és $A_4=2$. Vezessük be még az $A_2=1$ konvenciót is. Az n-szög egyik oldalát kiszemelve, ez valamelyik háromszögnek is oldala lesz. Aszerint, hogy ennek a háromszögnek a harmadik csúcsa éppen melyik csúcsa lesz a konvex n-szögnek, felírhatjuk az alábbi rekurziót:

$$A_n=\sum_{i=2}^{n-1}A_iA_{n+1-i}.$$

Ennek alapján

$$\begin{aligned}
A_5 &= 2+1+2=5,\\
A_6 &= 5+2+2+5=14,\\
A_7 &= 14+5+2\cdot 2+5+14=42,\\
A_8 &= 42+14+2\cdot 5+5\cdot 2+14+42=132,\\
A_9 &= 132+42+2\cdot 14+5\cdot 5+14\cdot 2+42+132=429,\\
A_{10} &= 429+132+2\cdot 42+5\cdot 14+14\cdot 5+42\cdot 2+132+429=1430.
\end{aligned}$$

6. *Hány százalékkal változna meg az első kozmikus sebesség, ha a Föld sugara és az átlagsűrűsége is valamilyen ok miatt 1%-kal megnőne?* 2%-*kal nőne* (1); 1,5%-*kal nőne* (2); 1%-*kal csökkenne* (X).

Megoldás. A helyes válasz: (2). Egy M tömegű és R sugarú égitestnél az első kozmikus sebesség (az égitest közvetlen közelében körpályán keringő űreszköz sebessége) $v \sim \sqrt{M/R}$, de mivel $M \sim \varrho R^3$ (ahol ϱ az égitest átlagsűsűsége), $v \sim R\varrho^{\frac{1}{2}}$.

Ha a Föld sugara és az átlagsűrűsége is valamilyen ok miatt 1%-kal megnőne, az első kozmikus sebesség $1{,}01^{1{,}5} = 1{,}015\,037$-szeresére változna, tehát mintegy 1,5%-kal nőne.

7. *Az ABC háromszög magasságpontja H, körülírt körének középpontja O, a BC oldal felezőpontja F, az A-ból induló magasság talppontja T. A H, O, F, T pontok egy téglalap csúcsai, melynek oldalai: $HO = 11$, $OF = 5$. Mekkora a BC oldal hossza?* 32 (1); $16+5\sqrt{3}$ (2); 28 (X).

Megoldás. A helyes válasz: (X). Ismeretes, hogy az O kezdőpontú helyvektorrendszerben $\mathbf{h} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ és így $\mathbf{f} = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} = \dfrac{\mathbf{h}-\mathbf{a}}{2}$. Így tehát $AH = 2OF = 10$. Pitagorasz tételét alkalmazva $OC = OA = \sqrt{AH^2+OH^2}$, ahonnan

$$BC = 2CF = 2\sqrt{OC^2-OF^2} = 2\sqrt{221-25} = 28.$$

8. *Szélcsendes időben egy nagy magasságból leejtett könnyű golyó állandósult sebessége* 20 m/s *lesz. Az elejtésétől számítva mennyi idő múlva éri el a sebessége a* 19 m/s-*os értéket, ha a közegellenállási erő a sebesség négyzetével arányos?* 3,73 s (1); 3,14 s (2); 37,3 s (X).

Megoldás. A helyes válasz: (1). A test mozgásegyenlete

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g\left(1-\frac{v^2}{v_0^2}\right),$$

ahol v_0 az állandósult sebesség. A végsebesség bizonyos hányadának (jelen esetben $\dfrac{19}{20}$ részének) eléréséhez szükséges időt numerikusan (a sebességváltozásokat véges sok kis lépésben számolva) becsülhetjük, vagy (az $u = \dfrac{v}{v_0}$ új változót bevezetve) integrálszámítás segítségével számíthatjuk ki:

$$t = \frac{v_0}{g}\int_0^{\frac{19}{20}} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \frac{v_0}{g}\,\frac{\ln 39}{2} \approx 3{,}73 \text{ s}.$$

9. *Mennyi* $\dfrac{10^{20\,000}}{10^{100}+3}$ *egész részének utolsó számjegye?* 3 (1); 5 (2); 7 (X).

Megoldás. A helyes válasz: (1).
$A = \dfrac{10^{20\,000}-3^{200}}{10^{300}+3}$ egész szám és $A = \left[\dfrac{10^{20\,000}}{10^{100}+3}\right]$, mert $\dfrac{3^{200}}{10^{100}+3} = \dfrac{9^{100}}{10^{100}+3} < 1$.

Mivel $A = \left(10^{100}\right)^{199} - 3\cdot\left(10^{100}\right)^{198} + \ldots + 3^{198}\cdot 10^{100} - 3^{199}$, továbbá $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$, azért $A \equiv -3^{199} \equiv -3^3\cdot(81)^{49} \equiv -27 \equiv 3 \pmod{10}$.

10. *Két, egyenként $+Q$ töltésű rögzített fémgömb F_1 erővel taszítja egymást. Ha az egyik gömb töltését $-Q$-ra változtatjuk, akkor F_2 erővel vonzzák egymást. Melyik állítás igaz?* $F_1 > F_2$ (1); $F_1 < F_2$ (2); $F_1 = F_2$ (X).

Megoldás. A helyes válasz: (2). Ha a gömbök mérete sokkal kisebb, mint a középpontjaik közötti x távolság, akkor (első közelítésben) a taszító- és a vonzóerő nagysága megegyezik; mindkettő $k\dfrac{Q^2}{x^2}$. Viszonylag közeli gömbök (vagy pontosabb számolás igénye) esetén figyelembe kell vennünk a megosztás jelenségét. Egyforma töltésű gömböknél a rajtuk levő töltések „átlagos távolsága” x-nél nagyobb, különböző töltések esetén pedig x-nél kisebb; emiatt $F_1 < F_2$.

11. *Egy* 3 *egység oldalú szabályos hatszöget olyan egységoldalú rombuszokkal szeretnénk kiparkettázni, melyek kisebbik szöge* 60 *fokos. Hányféleképpen lehet ezt megtenni?* 324 (1); 720 (2); 980 (X).

Megoldás. A helyes válasz: (X). A megoldás, amely feltételezi a determinánsok ismeretét (és némi angol nyelvtudást), megtekinthető a

`http://www.cs.elte.hu/~karolyi/GT/index.html`

lapon, lásd *determinant lemma (Lecture VII) and its application to rhombic tilings (Lecture VIII).* Itt sok más érdekesség is található, például az 5. feladat általános megoldása az úgynevezett Catalan-számok segítségével.

12. *Kelthet-e egy nagyon gyorsan mozgó, elektromosan töltött részecske a szuperszonikus repülőgépek Mach-kúpja mentén terjedő hanghullámokhoz hasonló, ugyancsak kúpszerűen terjedő elektromágneses sugárzást? Igen, de csak akkor, ha a részecske a fénynél gyorsabban mozog* (1); *nem, mert egyetlen részecske sem mozoghat gyorsabban, mint a fény* (2); *a kérdést elméletileg tisztázták, kísérletileg azonban még eldöntetlen* (X).

Megoldás. A helyes válasz: (1). Egy elektromosan töltött részecske polarizálható közegben (pl. vízben) kúpszerűen terjedő elektromágneses sugárzást (ún. Cserenkov-sugárzást) bocsát ki, ha a részecske sebessége meghaladja a közegbeli fénysebességet. Az így működő részecskeazonosító berendezéseket Cserenkov-detektoroknak nevezik, és elterjedten alkalmazzák a nagyenergiájú kísérleti részecskefizikában.

13. *A* 400 *jegyű számok közül találomra kiválasztunk egyet. Annak a valószínűsége, hogy egy prímszámot választottunk ki, körülbelül* $\frac{1}{100}$ (1); $\frac{1}{1000}$ (2); $\frac{1}{10\,000}$ (X).

Megoldás. A helyes válasz: (2). Ha x pozitív egész, akkor jelölje $\pi(x)$ az x-nél nem nagyobb pozitív prímek számát. Ismeretes, hogy $\pi(x)$ értéke közelítőleg $x/\ln x$. A 400 jegyű számok száma $9 \cdot 10^{399}$, ezek között a prímek száma $\pi\big(10^{400}\big) - \pi\big(10^{399}\big)$. A kérdéses valószínűség értéke ezek szerint közelítőleg

$$\frac{1}{9 \cdot 10^{399}}\left(\frac{10^{400}}{400 \ln 10} - \frac{10^{399}}{399 \ln 10}\right) \approx \frac{1}{9 \cdot 10^{399}}\left(\frac{10^{400}}{400 \ln 10} - \frac{10^{399}}{400 \ln 10}\right) = \frac{1}{400 \ln 10} \approx \frac{1}{1000}.$$

13+1. *Földi űrhajósok nagyon hosszú utazás végén egy olyan bolygó közelébe érnek, amelynek elektromos potenciálja igen nagy a Földéhez képest. Veszélyes-e emiatt a bolygó felszínére lépniük? Igen, áramütésnek teszik ki magukat, ha kilépnek az űrhajóból* (1); *már a bolygó megközelítése is veszélyekkel jár, ha az űrhajó fala nem jó elektromos vezető, és emiatt nem tekinthető Faraday-kalickának* (2); *nyugodtan leszállhatnak és kiléphetnek a bolygó felszínére, a Föld és az idegen bolygó közötti nagy potenciálkülönbség önmagában nem jelent veszélyt számukra* (X).

Megoldás. A helyes válasz: (X). A Föld és az idegen bolygó közötti nagy potenciálkülönbség önmagában nem jelent veszélyt, hiszen az űrhajósok mindig csak a helyi (lokális) potenciálváltozást (térerősséget) érzékelik, nem pedig a teljes utazás során „összegyűjtött” potenciálváltozást. (A földi potenciált nem „viszik magukkal”.) A helyzet hasonló a tengerszintről induló hegymászók esetéhez. Ha lassan kapaszkodnak fel egy nagyon magas (nagy helyzeti energiával rendelkező) hegycsúcsra, a magasságkülönbséget és az annak megfelelő energiakülönbséget a csúcsra lépve közvetlenül nem érzékelik, legfeljebb annak közvetett hatását (pl. a fokozatosan csökkenő légnyomást) tapasztalják.