I. rész

1. *Az A és B helységek közötti távolság $\frac{1}{4}$ részét egy kerékpáros 1 óra alatt tette meg, a hátralevő utat pedig 4 óra alatt. Sebességének mérőszáma* (km/órában) *mindkét szakaszon egész szám, melyek legkisebb közös többszöröse* 72. *Mekkora az AB távolság?* (*11 pont*)

Megoldás. Ha a kerékpáros az A és B helységek közötti távolság $\frac{1}{4}$ részét 1 óra alatt tette meg, a hátralevő utat pedig 4 óra alatt, akkor az út első, ill. második szakaszán levő v_1 és v_2 sebességeinek aránya: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{4}{3}$.

Ez azt jelenti, hogy valamely k pozitív egész számra:

$$v_1 = 4k, \quad v_2 = 3k \quad \text{és} \quad [4k; 3k] = 72 = 2^3 \cdot 3^2.$$

Ezek szerint k prímtényezős felbontásában szerepelnie kell egy db 2-esnek, egy db 3-asnak, és további prímeket már nem tartalmazhat. Tehát csak $k = 2 \cdot 3 = 6$ lehetséges.

Így $v_1 = 4 \cdot 6 = 24$, $v_2 = 3 \cdot 6 = 18$. A keresett távolság: $1 \cdot 24 + 4 \cdot 18 = 96$ km.

2. a) *Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert:*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+\operatorname{tg} x} + \dfrac{1}{1+\operatorname{ctg} x} = xy \\ xy + 4 = 2(x+y). \end{cases}$$ (*7 pont*)

b) *Egy számtani sorozat első tagja az egyenletrendszer x, y megoldása közül a nagyobbik, differenciája pedig a kisebbik. Hány kétjegyű pozitív egész tagja van a sorozatnak?* (*6 pont*)

Megoldás. a) Az első egyenletből

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg} x} + \frac{1}{1+\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg} x} + \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 1} = \frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = 1 = xy, \quad \text{azaz} \quad y = \frac{1}{x}.$$

Ezzel a második egyenlet:

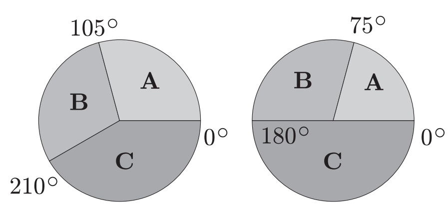
$$5 = 2\left(x + \frac{1}{x}\right), \quad \text{azaz} \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x_1 = 2$, $y_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 2$.

b) Bármelyik megoldás esetében a kérdéses számtani sorozat első tagja 2, differenciája $\frac{1}{2}$.

Ha $10 \le 2 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} \le 99$, akkor $17 \le n \le 195$. Ez összesen $195 - 16 = 179$ tag. De ezek közül csak azok lesznek pozitív egészek, amelyekre n értéke páratlan, $n = 2k+1$, azaz $n = 17, 19, 21, 23, \ldots, 195$. Ezek száma: $17 + (k-1) \cdot 2 = 195$ alapján $k = 90$. Tehát a kérdéses számtani sorozatnak 90 db kétjegyű pozitív egész tagja van.

3. *Három falu közös polgármestert választ. Három jelölt* (**A**, **B** *és* **C**) *közül lehet választani. Az 1. faluban* 2016, *a 2.-ban* 1320 *választásra jogosult járult az urnákhoz. A kördiagramok az 1. és a 2. faluban született eredményeket szemléltetik. Sajnos a 3. faluban született eredményt szemléltető kördiagram elveszett.*



1. falu 2. falu

A választás összesített végeredménye:

A *jelölt:* 1599 *szavazat,* **B** *jelölt:* 2169 *szavazat,* **C** *jelölt:* 1776 *szavazat.*

a) Készítsük el a 3. falu választási eredményét szemléltető kördiagramot. *(10 pont)*

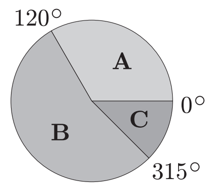
b) Hány lakosa van a 3. falunak, ha a falu lakosainak 72%*-a volt választásra jogosult és a választásra jogosultak* 56%*-a vett részt a szavazáson?* *(4 pont)*

Megoldás. *a)* A megadott kördiagramok alapján az 1. és a 2. faluban a szavazatok száma:

1. falu **A**: 588, **B**: 588, **C**: 840,

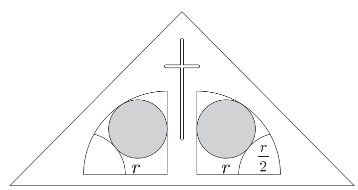
2. falu **A**: 275, **B**: 385, **C**: 660.

Az egyes jelöltek szavazatainak összegét levonva a végeredményből, megkapjuk a 3. falu választási eredményét: **A**: 736, **B**: 1196, **C**: 276 szavazat. Az ennek megfelelő kördiagram:



b) $x \cdot 0{,}72 \cdot 0{,}56 = 2208$, ahonnan $x \approx 5476{,}2$. Kerekítés után kapjuk, hogy a 3. falunak 5476 lakosa van.

4. *Az* ábrán *egy falucska építendő kápolnájának díszítőeleme látható. Mekkora a besatírozott körök (üvegablakok) sugara, ha a külső negyedkörök sugara:* $r = 80$ cm*?* *(14 pont)*



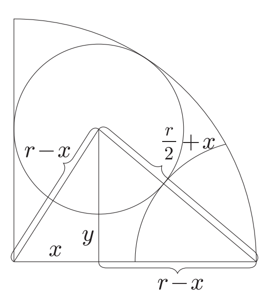
Megoldás. Ha x a keresett kör sugara, akkor az *ábra* megfelelő derékszögű háromszögeire felírva Pitagorasz tételét az alábbi egyenletekhez jutunk:

$$\left(\frac{r}{2} + x\right)^2 = (r - x)^2 + y^2 \quad \text{és} \quad (r - x)^2 = x^2 + y^2.$$

Azaz

$$\left(\frac{r}{2} + x\right)^2 = (r - x)^2 + (r - x)^2 - x^2.$$

Innen $x = \dfrac{7}{20}\,r$, tehát az üvegablakok sugara: $\dfrac{7 \cdot 80}{20} = 28$ cm.



II. rész

5. *Legyen az A halmaz az (1), a B halmaz pedig a (2) kifejezés értelmezési tartománya:*

$$(1) \quad \sqrt{2\sin^2\pi x - \cos\pi x - 1}, \qquad (2) \quad \lg(-3x^2 + 17x - 10).$$

Határozzuk meg

a) az $A \cap B$ halmaz elemeit; *(11 pont)*

b) a $B - A$ halmaz elemeit. *(5 pont)*

Megoldás. *a)* Az A halmaz elemeit a $2\sin^2\pi x - \cos\pi x - 1 \geq 0$ egyenlőtlenség megoldásai adják.

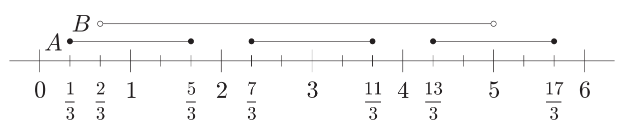
$$2(1-\cos^2\pi x) - \cos\pi x - 1 \geq 0, \quad \text{ahonnan} \quad -2\cos^2\pi x - \cos\pi x + 1 \geq 0.$$

E másodfokú egyenlőtlenség megoldása: $-1 \leq \cos\pi x \leq \frac{1}{2}$, azaz $\cos\pi x \leq \frac{1}{2}$.

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi x \leq \frac{5}{3}\pi + 2k\pi, \quad \text{ahonnan} \quad \frac{1}{3} + 2k \leq x \leq \frac{5}{3} + 2k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

A B halmaz elemeit a $-3x^2 + 17x - 10 > 0$ egyenlőtlenség megoldása adja. A másodfokú kifejezés zérushelyei: $\frac{2}{3}$ és 5, tehát a B halmaz elemei: $\frac{2}{3} < x < 5$.

Ábrázoljuk a két halmaz elemeit egy számegyenesen:



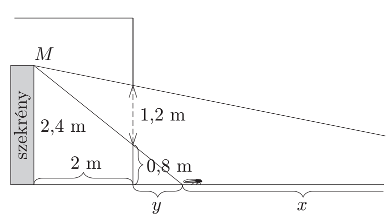
Az $A \cap B$ halmaz elemei:

$$\left\{x\colon \frac{2}{3} < x \leq \frac{5}{3}\right\} \cup \left\{x\colon \frac{7}{3} \leq x \leq \frac{11}{3}\right\} \cup \left\{x\colon \frac{13}{3} \leq x < 5\right\}.$$

b) A $B \backslash A$ halmaz elemei:

$$\left\{x\colon \frac{5}{3} < x < \frac{7}{3}\right\} \cup \left\{x\colon \frac{11}{3} < x < \frac{13}{3}\right\}.$$

6. *A faltól 2 méterre levő, 2,4 méter magas szekrény sarkának M pontjában ül egy madár és az 1,2 m magasságú ablakon át figyeli, amint egy bogár mászik az udvaron a ház falára merőleges irányban 0,8 méter/perc sebességgel. Az ablak alsó széle a földtől 0,8 méter magasan van. Mennyi ideig látja a madár a bogarat?* *(16 pont)*



Megoldás. Az *ábra* megfelelő hasonló háromszögeiből $\frac{y}{0{,}8} = \frac{y+2}{2{,}4}$, ahonnan $y = 1$ és $\frac{x+y}{0{,}8+1{,}2} = \frac{x+y+2}{2{,}4}$, azaz $\frac{x+1}{2} = \frac{x+3}{2{,}4}$, ahonnan $x = 9$ m.

Tehát a madár a bogarat

$$t = \frac{9\ \text{m}}{0{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{perc}}} = 11{,}25$$

percig látja.

7. *Az $f(x) = x^2 + ax + b$ és $g(x) = x^2 + bx + a$ függvényekhez ($a > b$) pontosan egy olyan x_0 hely található, melyben a függvények görbéjéhez tartozó érintők merőlegesek egymásra.*

a) Ábrázoljuk a $h(x) = f(x) - g(x)$ függvényt. *(8 pont)* *b) Számítsuk ki az $f(x)$ és $g(x)$ függvények görbéje, valamint az y tengely által közbezárt terület nagyságát.* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) A feltételek szerint az $f'(x_0)\cdot g'(x_0)=-1$ egyenletnek egy megoldása van. $(2x_0+a)(2x_0+b)=-1$, azaz $4x_0^2+2x_0(a+b)+ab+1=0$. Ez utóbbi egyenletnek akkor és csak akkor van egy megoldása, ha diszkriminánsa 0.

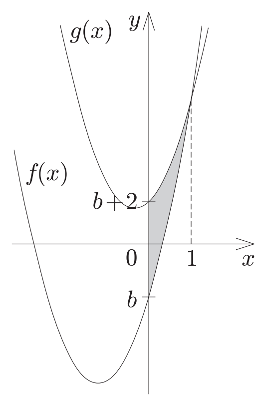
$$4(a+b)^2-16(ab+1)=0,\quad \text{ahonnan}\quad (a-b)^2=4.$$

Mivel $a>b$, azért innen $a-b=2$, vagyis $a=b+2$. Ezzel

$$h(x)=x^2+(b+2)x+b-x^2-bx-b-2=2x-2.$$

b) A két grafikon metszéspontjának abszcisszája $x=1$; ha $x<1$, akkor $g(x)>f(x)$. A keresett területet az *ábra* szemlélteti. A terület mérőszáma:

$$\int_0^1 \left[g(x)-f(x)\right]dx=$$
$$=\int_0^1 (x^2+bx+b+2-x^2-bx-2x-b)\,dx=$$
$$=\int_0^1 (2-2x)\,dx=\left[2x-x^2\right]_0^1=(2-1)-(0)=1.$$



8. *András meglátott egy reklámújságban egy igen kedvező árú gesztenyenyuszit. Amikor meg akarta vásárolni, döbbenten tapasztalta, hogy a pénztárnál* 66 Ft *híján az újságban feltüntetett ár kétszeresét számlázták. Miután panaszt tett, kiderült, hogy az újságban a háromjegyű ár első és harmadik számjegyét véletlenül felcserélték. Mennyit kell fizetnie Andrásnak, ha megveszi az árut?* (*16 pont*)

Megoldás. Ha András az újságban az $\overline{abc}$ árat látta, akkor a feltételek szerint $\overline{cba}=2\cdot\overline{abc}-66$, azaz $\overline{cba}+66=2\cdot\overline{abc}$. A jobb oldal páros, így a-nak is párosnak kell lennie. $a<6$, ellenkező esetben ugyanis a jobb oldal 1200-nál nagyobb lenne. Tehát $a=4$ vagy $a=2$.

Ha $a=4$, akkor a bal oldal 0-ra végződik. Ekkor viszont $c=5$ lehet csak. De ez lehetetlen, hiszen $a=4$ esetén a jobb oldal 800-nál nagyobb, míg $c=5$ miatt a bal oldal kisebb, mint 700.

Ha $a=2$, akkor a bal oldal 8-ra végződik. Ekkor a jobb oldalon $c=4$ vagy $c=9$. De $c=9$ nem lehet, hiszen ekkor a bal oldal 900-nál nagyobb, míg a jobb oldal kisebb, mint 600. Tehát csak $a=2$, $c=4$ lehetséges. Ezekkel

$$\overline{4b2}+66=2\cdot\overline{2b4},\quad \text{azaz}\quad 468+10b=408+20b,\quad \text{ahonnan}\quad b=6.$$

Tehát az újságban közölt összeg 264 Ft, míg a tényleges ár 462 Ft. Valóban: $2\cdot 264-66=462$.

9. *a*) *Adott három párhuzamos egyenes; mindegyiken pirosra festettünk* 5 *pontot. Tekintsük az összes háromszöget, melyek csúcsai pirosak, két csúcsuk valamelyik egyenesen, a harmadik pedig egy másik egyenesen van; majd tekintsük az összes olyan piros csúcsú négyszöget, melyek két-két csúcsa egy-egy egyenesre illeszkedik. Miből van több: háromszögből vagy négyszögből?* (*6 pont*)

b) *Legyen most adva két párhuzamos egyenes; egyikükön n $(n\geq 2)$, a másikon pedig $(n+1)$ piros pont. Ismét képezzük az összes háromszöget, illetve négyszöget, melyek csúcsai pirosak. Most miből van több, háromszögből vagy négyszögből?* (*10 pont*)

Megoldás. *a*) A háromszögek száma: $6\cdot\binom{5}{2}\cdot 5=30\cdot\frac{5!}{2\cdot 3!}=300$, a négyszögek száma: $3\cdot\binom{5}{2}^2=3\cdot\frac{(5!)^2}{2^2\cdot(3!)^2}=3\cdot\frac{20^2}{4}=300$. Tehát ugyanannyi háromszög keletkezik, mint négyszög.

b) A háromszögek száma: $\binom{n}{2}\cdot(n+1)+\binom{n+1}{2}\cdot n$, a négyszögeké: $\binom{n}{2}\cdot\binom{n+1}{2}$.

Vizsgáljuk meg, milyen n-re lesz több háromszög, azaz oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\binom{n}{2}\cdot(n+1)+\binom{n+1}{2}\cdot n>\binom{n}{2}\cdot\binom{n+1}{2},$$

$$\frac{n!(n+1)}{2(n-2)!}+\frac{(n+1)!n}{2(n-1)!}>\frac{n!}{2(n-2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{2(n-1)!},$$

$$\frac{(n-1)n(n+1)}{2}+\frac{n^2(n+1)}{2}>\frac{(n-1)n^2(n+1)}{4},$$

$$\frac{n-1}{2}+\frac{n}{2}>\frac{n(n-1)}{4},\qquad \text{ahonnan}\qquad 0>n^2-5n+2.$$

A másodfokú kifejezés zérushelyei: $n_1=\frac{5-\sqrt{17}}{2}\approx 0{,}44$, $n_2=\frac{5+\sqrt{17}}{2}\approx 4{,}56$.

Azt kaptuk, hogy ha $n=2,3$ vagy 4, akkor háromszögből lesz több, ha pedig $n>4$, akkor négyszögből.