William Lowell Putnam, az 1882-ben végzett egykori harvardi diák egy cikket írt a harvardi öregdiákok 1921 decemberi évkönyvében, amelyben lelkesen ecsetelte egy egyetemek közti csapatverseny várható hozadékait. Hogy egy ilyen verseny valóban létrejöhessen, azt Putnam özvegye, *Elizabeth Lowell Putnam* 1927-ben létrehozott alapítványa tette lehetővé. Kezdetben az angol nyelv volt a verseny tárgya és néhány évvel később kísérleti jelleggel iktatták be a matematikát is. Jelenlegi formájában 1938 óta kerül rá sor minden év decemberének első szombatján. 1962-től kezdve a versenyen 12 feladatot tűznek ki, amelyeket hagyományosan **A1**-től **A6**-ig, illetve **B1**-től **B6**-ig számoznak. A két feladatsor megoldására három-három óra áll a versenyzők rendelkezésére. A versenyen minden, még nem végzett amerikai és kanadai egyetemi hallgató részt vehet, bár egy diák sem indulhat négynél több alkalommal.

A verseny egyéni, de minden olyan egyetem vagy főiskola, ahonnan legalább hárman elindulnak, kijelölhet egy háromtagú csapatot a verseny előtt; az ő összesített pontszámuk adja a csapat eredményét.

Az első öt helyezett csapatot felkészítő oktatási intézmény matematika tanszéke komoly pénzdíjban részesül. A győztes jutalma 25 000, a további négy helyezetté pedig rendre 20, 15, 10, illetve 5 ezer dollár; a győztes csapat tagjai fejenként 1000, a további helyzettek pedig 800–600–400, illetve 200 dollár díjat kapnak. Az egyéni verseny első 5 helyezettjét nem rangsorolják külön: valamennyien a *Putnam Fellow* címet nyerik, ami 2500 dolláros pénzdíjat is jelent; az utánuk következő 10–10 versenyző pedig fejenként 1000, illetve 250 dollár díjban részesül.

Sok sikert kívánunk olvasóinknak a feladatok megoldásához. A Putnam versennyel kapcsolatos információk megtalálhatók a verseny honlapján:

`http://math.scu.edu/putnam/index.html`

A1. A kosárlabdafenomén Shanille O'Keal csapatának statisztikusa folyamatosan nyilvántartja, hogy Miss O'Kealnek a mezőnyből végrehajtott N kísérletéből hány végződött kosárral. Az idény elején a sikeres dobások $S(N)$ száma alacsonyabb volt N nyolcvan százalékánál, a bajnokság végére viszont ez az arány nyolcvan százalék fölé emelkedett. Volt-e időközben feltétlenül olyan pillanat, amikor $S(N)$ éppen egyenlő volt az addigi N dobókísérlet nyolcvan százalékával?

A2. H_1 és H_2 két háromszög, oldalaik hossza rendre a_i, b_i, c_i, a területük pedig T_i $(i=1,2)$. Ha $a_1 \le a_2$, $b_1 \le b_2$, $c_1 \le c_2$, továbbá H_2 hegyesszögű, akkor igaz-e, hogy $T_1 \le T_2$?

A3. Az u_n sorozatot a következőképpen definiáljuk: $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ és minden $n \ge 0$ esetén

$$\det \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} \\ u_{n+2} & u_{n+3} \end{pmatrix} = n!.$$

Bizonyítsuk be, hogy a sorozat elemei egész számok. (Definíció szerint $0! = 1$.)

A4. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n számhoz van olyan N egész szám, hogy az $x_1x_2\cdots x_n$ szorzat felírható

$$x_1x_2\cdots x_n = \sum_{i=1}^{N} c_i(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n)^n$$

alakban, ahol c_i racionális, az a_{ij} számok pedig a -1, 0, 1 számok közül valók.

A5. Egy $m\times n$-es sakktáblát véletlenszerűen kiszínezünk: minden egyes mező színe a többiétől függetlenül 1/2 valószínűséggel piros vagy fekete. Azt mondjuk, hogy két mező, p és q egyszínű tartományban vannak, ha létezik élben szomszédos mezőknek olyan sorozata, amelyik p-vel kezdődik, q-ig tart és a sorozat mezői azonos színűek. Bizonyítsuk be, hogy az egyszínű tartományok számának a várható értéke nagyobb, mint $\dfrac{mn}{8}$.

A6. Legyen az $f(x;y)$ folytonos valós értékű függvény a $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ egységnégyzeten. Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x;y)\,dx\right)^2 dy + \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x;y)\,dy\right)^2 dx \le$$

$$\le \left(\int_0^1\int_0^1 f(x;y)\,dx\,dy\right)^2 + \int_0^1\int_0^1 \big[f(x;y)\big]^2\,dx\,dy.$$

B1. Tegyük föl, hogy az r racionális szám gyöke a $P(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_0$ egész együtthatós polinomnak, azaz $P(r)=0$. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi n darab szám mindegyike egész:

$$c_nr, \quad c_nr^2 + c_{n-1}r, \quad c_nr^3 + c_{n-1}r^2 + c_{n-2}r, \quad \ldots, \quad c_nr^n + c_{n-1}r^{n-1} + \ldots + c_1r.$$

B2. Bizonyítsuk be az n és az m pozitív egész számokra, hogy

$$\frac{(m+n)!}{(m+n)^{m+n}} < \frac{m!}{m^m} \cdot \frac{n!}{n^n}\,.$$

B3. Határozzuk meg azokat az $a > 0$ valós számokat, amelyekhez van olyan, a $[0;a]$ intervallumon értelmezett nem negatív értékű $f(x)$ folytonos függvény, hogy az

$$R = \big\{(x,y)\colon\, 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le f(x)\big\}$$

tartomány kerülete k hosszúságegység, területe pedig k területegység valamilyen k valós számra.

B4. Az $n \ge 2$ pozitív egész számra legyen $\theta = \dfrac{2\pi}{n}$. Tekintsük a derékszögű koordinátarendszerben a $P_k(k,0)$ pontokat ($k = 1,2,\ldots,n$). Az R_k transzformáció az óramutató járásával ellenkező irányban θ szöggel forgatja el a sík pontjait a P_k pont körül. Legyen R az ebben a sorrendben végrehajtott $R_1, R_2, \ldots, R_n$ forgatások egymásutánja. A sík tetszőleges $(x;y)$ pontjára határozzuk meg és írjuk a legegyszerűbb alakba az $R(x;y)$ pont koordinátáit.

B5. Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 1^-} \prod_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right)^{x^n}$$

határértéket.

B6. Tekintsük a pozitív egészek egy nem üres A részhalmazát és legyen $N(x)$ az A halmaz x-nél nem nagyobb elemeinek a száma. Jelölje B azoknak a b pozitív egészeknek a halmazát, amelyek felírhatók $b = a - a'$ alakban, ahol $a \in A$ és $a' \in A$. Legyenek a B halmaz elemei nagyság szerint növekvő sorrendben $b_1 < b_2 < \ldots$. Bizonyítsuk be, hogy ha a $b_{i+1} - b_i$ sorozat nem korlátos, akkor $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{N(x)}{x} = 0$.