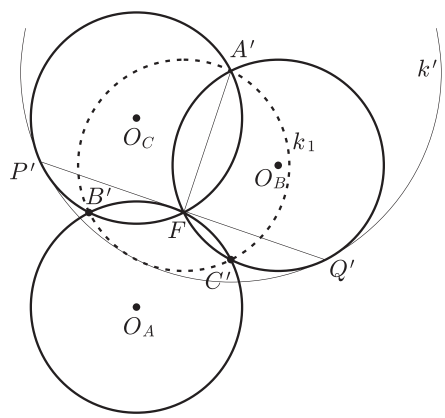
1. feladat. *Adott a síkban az ABC háromszög, melynek körülírt körét kívülről érinti a k kör. A k kör érinti egyúttal az AB és AC félegyeneseket is, mégpedig a P, illetve Q pontban. Mutassuk meg, hogy a PQ szakasz felezőpontja egybeesik az ABC háromszög BC oldalához hozzáírt körének középpontjával.*

I. megoldás. Alkalmazzunk inverziót az A-val szemközti hozzáírt körre, melynek középpontját F jelöli. Az ABC háromszög oldalai (mivel érintik e kört) mind azonos sugarú körökbe transzformálódnak. Feltehetjük, hogy ez a sugár egységnyi, és a megfelelő körök középpontjai O_A, O_B és O_C. Az ABC körülírt körének a képe az A', B' és C' pontokon átmenő k_1 kör lesz. (A vesszős változat az adott pont inverzió utáni képet jelöli.)

Azt állítjuk, hogy a k_1 kör szintén egyégnyi sugarú. O_A, O_B és O_C ugyanis egyaránt egységnyi távolságra vannak az F-től, így a rajtuk átmenő kör sugara is egységnyi. Az $O_AO_BO_C$ háromszög oldalfelezőpontjai által meghatározott háromszög körülírt körének sugara tehát $\frac{1}{2}$. E háromszög csúcsai az FA', FB' és FC' szakaszok felezőpontjai, tehát az említett $\frac{1}{2}$ sugarú kört egy F közepű 2-szeres nagyítás a k_1-be viszi, mely így csakugyan egységsugarú.



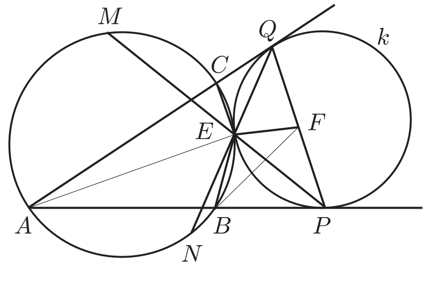
Az A' körüli 2 egység sugarú kör belülről érinti az AB, ill. AC oldalak képeit és a körülírt kör képét is, így e kör éppen k képe lesz az inverzió során. A P', Q' pontok pedig az A'-vel átellenes pontok a megfelelő egyégsugarú körökön, ezért $A'FP'$ és $A'FQ'$ egyaránt derékszögek, továbbá F (a szimmetria miatt) felezi $P'Q'$-t. Mivel F volt az inverzió középpontja, F egyúttal a PQ szakaszt is felezi. $\square$

Megjegyzések. 1. Hasonlóan a tavalyi verseny első feladatához, idén sem volt haszontalan a síkbeli inverzió tulajdonságainak ismerete (jóllehet tavaly többen próbálkoztak az alkalmazásával). A versenybizottság fenntartja magának az inverzióval (is) megoldható példa kitűzésének jogát.

2. A feladat szoros rokonságot mutat az 1978. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpián kitűzött 4. feladattal. A különbség lényegében annyi, hogy az olimpiai feladatban a k kör ***belülről*** érintett, és az érintési pontok alkotta szakasz felezőpontja a ***beírt*** kör középpontja volt. Az említett feladatra megjelent[1] egyik szellemes megoldás ötlete könnyen alkalmazható a mi esetünkre is. Ezt vázoljuk az alábbiakban.

3. Több versenyző próbálkozott az analitikus módszerrel. Természetesen így is teljes értékű megoldás kapható, azonban viszonylag kevesen jártak sikerrel.

II. megoldás. Legyen E a k kör és az ABC háromszög körülírt körének érintési pontja, M, ill. N pedig a PE, ill. QE egyeneseknek és a háromszög körülírt körének E-től különböző metszéspontja. Mivel E-ből a k kört egy középpontos hasonlóság viszi az ABC háromszög körülírt körébe, az M-ben, ill. N-ben a körülírt körhöz húzott érintők párhuzamosak AB-vel, ill. AC-vel. Eszerint M felezi a C-t tartalmazó AB ívet, N pedig felezi a B-t tartalmazó AC ívet.



Felhasználva a kerületi szögek egyenlőségét, illetve hogy feleakkora ívhez feleakkora kerületi szög tartozik

$$MEB\sphericalangle = MEA\sphericalangle + AEB\sphericalangle = \frac{\beta+\alpha}{2} + \gamma = \frac{\pi+\gamma}{2}$$

[1] ld. Reiman – Dobos: *Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák* 1959–2003 (328–332. oldal)

adódik, ahonnan

$$BEP\sphericalangle = \pi - MEB\sphericalangle = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

(Felhasználtuk, hogy $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.)

Világos, hogy $ABEC$ húrnégyszög, így a konkáv $BEC\sphericalangle$ nagysága $\pi+\alpha$. Legyen F az iménti szög felezőjének és a PQ szakasznak a metszéspontja. Eszerint

$$BEF\sphericalangle = \frac{\pi+\alpha}{2}, \qquad \text{és} \qquad APF\sphericalangle = \frac{\pi-\alpha}{2},$$

hiszen az AQP háromszög egyenlő szárú. Azt kaptuk, hogy $FEBP$ húrnégyszög, melyben a PF íven nyugvó kerületi szögre

$$PBF\sphericalangle = PEF\sphericalangle = BEF\sphericalangle - BEP\sphericalangle = \frac{\pi+\alpha}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi-\beta}{2}.$$

Az adódott tehát, hogy BF az ABC háromszög B-nél lévő külső szögének a felezője.

A fenti számolás értelemszerű módosításával adódik, hogy CF az ABC háromszög C-nél levő külső szögfelezője. A két külső szögfelező F metszéspontja egyfelől a BC oldalhoz hozzáírt kör középpontja, másfelől rajta van az ABC háromszög A-ból induló szögfelezőjén. E szögfelező azonban felezi az egyenlő szárú APQ háromszög alapját, az állítást igazoltuk. $\square$

2. feladat. *Határozzuk meg a legkisebb olyan, 2004-től különböző, pozitív egész n számot, amelyhez létezik olyan egész együtthatós $f(x)$ polinom, hogy az $f(x)=2004$ egyenletnek legalább egy, az $f(x)=n$ egyenletnek pedig legalább 2004 különböző egész megoldása van.*

Megoldás. Legyen $g(x)$ egy kívánt tulajdonságú polinom a feladatbeli n számhoz. Létezik tehát olyan a egész, melyre $g(a)=2004$. Definiáljuk a $g_1(x) := g(x+a)$ polinomot. Nyilván $g_1(0)=g(a)=2004$, azaz $g_1(x)$ konstans tagja 2004, továbbá a $g_1(x)=n$ egyenletnek léteznek különböző, $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$ egész gyökei, melyek egyike sem 0, mivel $g_1(0)=2004$. Ez azt jelenti, hogy

$$g_1(x) - n = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2004}) \cdot g_2(x),$$

ahol a polinomosztás miatt a $g_2(x)$ polinom is egész együtthatós, konstans tagja legyen c. Az egyenlőségben szereplő két polinom konstans tagjai megegyeznek, így persze

$$|2004-n| = |a_1|\cdot|a_2|\cdot\ldots\cdot|a_{2004}|\cdot|c|,$$

ahonnan, felhasználva, hogy $c\neq 0$, kapjuk, hogy

$$|2004-n| \geq |a_1|\cdot|a_2|\cdot\ldots\cdot|a_{2004}| \geq |1|\cdot|-1|\cdot|2|\cdot|-2|\cdot\ldots\cdot|1002|\cdot|-1002|.$$

Innen látszik, hogy $0<n<2004$ nem lehetséges, ezért a fenti egyenlőtlenségből $n \geq (1002!)^2 + 2004$ következik.

Legyen most a $g(x)$ polinom a következő:

$$g(x) := -(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)\ldots(x-1002)(x+1002) + (1002!)^2 + 2004.$$

Erre a polinomra $g(0)=2004$ és

$$g(\pm k) = (1002!)^2 + 2004$$

minden $1 \leq k \leq 1002$ egészre, vagyis a feladat kérdésére a válasz

$$n = (1002!)^2 + 2004. \quad \square$$

3. feladat. *Egy körvonal mentén néhány kék és piros pontot helyeztünk el. Ezekkel az alábbi műveleteket végezhetjük:*

(a) valahova beillesztünk egy új piros pontot, és a két szomszédját ellentétes színűre változtatjuk.

(b) ha legalább három pont van, és ezek közül legalább az egyik piros, akkor egy piros pontot törlünk, a két szomszédját pedig ellentétes színűre változtatjuk.

Kezdetben két pont van a kör kerületén, mindkettő kék. Elérhetjük-e a lépések többszöri alkalmazásával, hogy újra két pontunk legyen, de azok pirosak legyenek?

I. megoldás. A piros és kék pontok a kört ívekre osztják; írjunk minden egyes ívre $(+1)$-et vagy (-1)-et úgy, hogy a piros pontok két oldalán egyenlő, a kék pontok két oldalán pedig ellentett számok álljanak. Mivel a kék pontok száma minden lépésben párossal változik, ezért mindig páros sok kék pont van a körvonalon. Az ívek fenti számozása tehát kétféleképpen végezhető el, és az egyik számozásból úgy kapjuk a másikat, hogy minden íven előjelet váltunk. Megmutatjuk, hogy az ívekre írt számok összege minden lépés után osztható marad 3-mal. A kezdeti állapotban ez igaz, mert egy $(+1)$-et és egy (-1)-et adunk össze.

Ha egy lépésben egy i ívre piros pontot ültetünk, akkor a beillesztett piros pont szomszédjainak színe megváltozik, ezért a lépés előtti ívszámozásból helyes ívszámozást kapunk, ha a beillesztett piros pont két oldalán keletkező részívekre az i ívre írt szám ellentettjét írjuk, a további íveken pedig megtartjuk a számozást. Piros pont törlésekor fordítva járunk el. Az ívekre írt számok összege mindkét esetben 3-mal változik, tehát ha korábban 3-mal osztható volt az összeg, úgy ez a lépés után is így marad.

Ha néhány lépés után két piros pont marad, akkor két egyenlő szám kerül a kör kerületére, melyek összege nem osztható 3-mal. Ezt az állapotot tehát nem lehet elérni. $\square$

II. megoldás. Ismét azt igazoljuk, hogy nem kaphatunk két piros pontot az adott lépésekkel. Feleltessünk meg a pontoknak egy-egy geometriai transzformációt: a kék pontok jelentsék a t-vel jelölt tengelyes tükrözést az x-tengelyre, a piros pontok pedig az f-fel jelölt, origó körüli, $120°$-os elforgatásnak feleljenek meg.

Megmutatjuk, hogy azokban a pontrendszerekben, amelyek két kék pontból kiindulva előállíthatóak, a pontoknak megfeleltetett egybevágósági transzformációk szorzata – tetszőleges kék vagy piros pontból indulva és pozitív körüljárás szerint haladva – a minden pontot fixen hagyó, identikus transzformáció. Ez a kezdeti állapotban (két tükrözés) teljesül. Elegendő tehát megmutatnunk, hogy a lépések megőrzik ezt a tulajdonságot, hiszen két piros pontra a megfelelő egybevágóságok szorzata egy $-120°$-os forgatás.

Először is figyeljük meg, hogy ha egy rögzített kék vagy piros p pontból kiindulva a megfelelő transzformációk szorzata minden pontot helyben hagy, akkor tetszőleges p' ponttól kezdve a transzformációk elvégzését, szintén az identikus transzformációt kapjuk. Ez azért igaz, mert ha p-től p'-ig (pozitív körüljárás szerint) a transzformációk szorzata egy τ egybevágóság, akkor a $p'p$ íven a szorzat szükségképpen a τ^{-1} inverz leképezés. Ha viszont p'-ből indulunk, akkor a szorzat transzformációt úgy kapjuk, hogy először a τ^{-1}, majd a τ transzformációt végezzük el, ám ez a leképezés-sorozat is minden pontot helyben hagy.

Tegyük tehát fel, hogy valamely állapotban a transzformációk szorzata az identitás, és tekintsünk egy tetszőleges lépést. A lépés négyféle lehet:

$$ff \Leftrightarrow tft, \qquad ft \Leftrightarrow tff, \qquad tf \Leftrightarrow fft, \qquad tt \Leftrightarrow fff;$$

a transzformációk szorzata egyik esetben sem változik, ha a kiindulópont a megváltozott pontokon kívülre esik, tehát legalább egy esetben. Láttuk, hogy a transzformációk szorzata ekkor bármely kiinduló pontból az identitás lesz, amivel állításunkat igazoltuk. $\square$