

## I. rész

1. Mutassuk meg, hogy nincs olyan valós számpár, amelyre

$$\left. \begin{aligned} (x^2 + 5)^2 &= 25 - |y - 3| \\ 21x + 63y &= 188 \end{aligned} \right\}. \quad (11 \text{ pont})$$

**Megoldás.** Az első egyenletből:  $(x^2 + 5)^2 \geq 25$ ,  $25 - |y - 3| \leq 25$ . Így az első egyenlet megoldása csak  $x = 0$ ,  $y = 3$  lehet. Ezt a második egyenletbe behelyettesítve:

$$21 \cdot 0 + 63 \cdot 3 = 189 \neq 188.$$

Az egyenletrendszernek tehát nincs megoldása.

2. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x) = ax^2 + (2a + b)x - (b^2 - b - a)$$

függvényt.

a) Mutassuk meg, hogy ha  $a$  és  $b$  egész számok, akkor

$$f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2)$$

osztható 5-tel.

b) Igazoljuk, hogy ha  $a$  pozitív, akkor  $f(x)$ -nek van zérushelye. (12 pont)

**Megoldás.** a) Az állítás tetszőleges egész együtthatós polinomra igaz: ha  $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ , akkor  $f(-2) + f(2) = 8A + 2C$ ,  $f(-1) + f(1) = 2A + 2C$ , tehát a szóban forgó összeg  $10A + 5C$ , ami valóban osztható 5-tel.

b) A diszkrimináns  $b^2 + 4ab^2$ , ami nem negatív, ha  $a > 0$ .

3. Hány darab 2-nél kisebb, pozitív tagja van az  $a_n = -5 + \log_2(n + 4)$  sorozatnak? (14 pont)

**Megoldás.** A következő egyenlőtlenségrendszer pozitív egész megoldásainak a számát kell meghatároznunk:  $0 < -5 + \log_2(n + 4) < 2$ , azaz  $5 < \log_2(n + 4) < 7$ .

Az 5 és a 7 logaritmus segítségével felírható:  $\log_2 32 < \log_2(n + 4) < \log_2 128$ .

A 2-es alapú logaritmus függvény növekedő, ezért:  $32 < n + 4 < 128$ , vagyis  $28 < n < 124$ .

A megfelelő  $n$  értékek: 29, 30, ..., 122, 123, vagyis 95 db pozitív egész szám a megoldása az egyenlőtlenségrendszernek. Ez azt jelenti, hogy az  $a_{29}, a_{30}, \dots, a_{123}$  az a 95 darab tagja a sorozatnak, amely megfelel a feladat feltételeinek.

4. Ágnes 2005. március 25-én befizet 600 000 Ft-ot egy olyan bankba, ahol az évi kamat 8%-os és a naptári év végén van kamatelszámolás. Mennyi lesz a követelése 2006. március 25-én? (14 pont)

**Megoldás.** Az év végi megszakítás nem befolyásolja a kamatjövárást. Ha az év 84. napján teszi be a pénzt, akkor abban az évben 281 napig kamatozik. Ha év végén a kamatot hozzáírják a betéthez, akkor év végén a tőke  $1,08^{\frac{281}{365}}$ -szőrösére nő, majd a hátrelévő 84 napon  $1,08^{\frac{84}{365}}$ -szőrösére. Ez azt jelenti, hogy 2006. március 25-én, az év leteltével  $600\,000 \cdot 1,08 = 648\,000$  forint lesz Ágnes követelése.

## II. rész

5. Adott három egyenes az egyenletével:

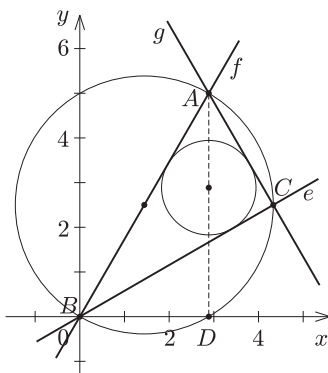
$$x - \sqrt{3}y = 0, \quad \sqrt{3}x - y = 0, \quad \sqrt{3}x + y - 10 = 0.$$

a) Mutassuk meg, hogy a három egyenes derékszögű háromszöget határoz meg.

b) Mekkora a háromszög köré írt körének a sugara?

c) Számítsuk ki a beírt kör középpontjának a koordinátáit. (16 pont)

**Megoldás.** a) Az első és a második egyenesre illeszkedik az origó, a harmadikra nem, így a három egyenes háromszöget határoz meg. Az  $e$  egyenes meredeksége:  $m_e = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , a  $g$  egyenesé:  $m_g = -\sqrt{3}$ . Mivel  $m_e m_g = -1$ , azért az  $e$  és  $g$  merőlegesen metszi egymást, a három egyenes derékszögű háromszöget határoz meg.



b) Derékszögű háromszögben (a Thalész-tétel alapján) az átfogó hosszának felével azonos hosszúságú a köré írt kör sugara. Az  $f$  és a  $g$  egyenes metszéspontját kiszámítjuk:  $A\left(\frac{5}{\sqrt{3}}; 5\right)$ . Az  $e$  és az  $f$  metszéspontja:  $B(0; 0)$ . Innen adódik, hogy a háromszög átfogója,  $AB = \frac{10}{\sqrt{3}}$ , azaz a köré írt kör sugara:  $r = \frac{5}{\sqrt{3}}$ .

c) Legyen  $e$  és  $g$  metszéspontja  $C$ , továbbá az  $A$  merőleges vetülete az  $x$  tengelyre  $D$ . Az egyenesek meredekségeit (irányszögeit) felhasználva:  $\angle ABC = 30^\circ$ . A  $B$ -ből induló belső szögfelezőre illeszkedik a beírt kör középpontja. Mivel  $\angle ABD = 60^\circ$ , így a  $B$ -ből induló szögfelező irányszöge  $45^\circ$ , vagyis az  $y = x$  egyenesre illeszkedik a középpont. A  $BDA$  derékszögű háromszögben  $\angle BAD = 30^\circ$ , az  $ABC$  derékszögű háromszögben  $\angle BAC = 60^\circ$ . Ez azt jelenti, hogy az  $ABC$  háromszögben az  $A$ -ból induló szögfelező az  $AD$  egyenes. A beírt kör középpontjának erre is illeszkednie kell, vagyis a második koordinátája  $\frac{5}{\sqrt{3}}$ . Mivel a középpont  $y = x$ -re is illeszkedik, azért koordinátái  $\left(\frac{5}{\sqrt{3}}; \frac{5}{\sqrt{3}}\right)$ .

6. Adott a valós számokon értelmezett,  $f(x) = 2x^6 - 3x^4 + x^2$  függvény.

a) Határozzuk meg  $f\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right)$  pontos értékét.

b) Mutassuk meg, hogy az  $f(\sin \alpha) + f(\cos \alpha)$  összeg nem függ  $\alpha$  értékétől. (16 pont)

**Megoldás.**

a) 
$$f\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right) = 2(\sqrt{3})^6 - 3(\sqrt{3})^4 + (\sqrt{3})^2 = 2 \cdot 27 - 3 \cdot 9 + 3 = 30.$$

b) 
$$\begin{aligned} f(\sin \alpha) + f(\cos \alpha) &= (2 \sin^6 \alpha - 3 \sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha) + (2 \cos^6 \alpha - 3 \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha) = \\ &= 2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha). \end{aligned}$$

A zárójelben lévő összegeket alakítsuk át. Tudjuk, hogy

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha,$$

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha.$$

Ezeket felhasználva:

$$f(\sin \alpha) + f(\cos \alpha) = 2(1 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha) - 3(1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha) + 1 = 0,$$

ami valóban nem függ  $\alpha$ -tól.

7. Egy középiskolában azt tapasztaltuk, hogy a tanulók 75%-a elkészíti a házi feladatát matematikából. Egy újságíró ebben az iskolában öt véletlenszerűen választott tanulóval szeretne beszélgetni a tanulási szokásairól.

a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy olyan tanulókat választ, akiknek készen van a házi feladata?

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy az öt választott tanulóból legalább háromnak készen van a házi feladata?

c) Az iskola 20 fős 12.c. osztályában (ahol az iskolai átlagnál egy kicsit jobb a helyzet) 16-an írtak házi feladatot. A csoportban összesen 3 leány van, ők mindig elkészítik feladataikat. Ha ebből a csoportból választunk 4 fiút és 1 leányt, akkor mekkora a valószínűsége, hogy a választottak közül pontosan kettőnek nincs kész a házi feladata? (16 pont)

**Megoldás.** a) Egy tanuló esetén 0,75 a valószínűsége annak, hogy készen van a házi feladata. Feltéve, hogy a tanulók viselkedése független,  $0,75^5 \approx 0,2373$  annak a valószínűsége, hogy mind az öt tanuló elkészítette a feladatát.

b) A szóban forgó esemény a következő, egymást kizáró módokon valósulhat meg:

Pontosan öt tanuló írt házi feladatot:  $0,75^5 \approx 0,2373$ .

Pontosan négy tanuló írt házi feladatot:  $\binom{5}{4} \cdot 0,75^4 \cdot 0,25 \approx 0,3955$ .

Pontosan három tanuló írt házi feladatot:  $\binom{5}{3} \cdot 0,75^3 \cdot 0,25^2 \approx 0,2637$ .

A fenti valószínűségek összege  $0,8965$ , ennyi a valószínűsége annak, hogy az öt választott tanulóból legalább háromnak készen van a házi feladata.

c) 4 fiút és 1 leányt összesen  $\binom{17}{4} \cdot \binom{3}{1} = 7140$ -féle módon választhatunk ki.

Lányt háromféleképpen tudunk választani, és ő biztosan írt házi feladatot. A feladat szövege szerint az a két fő, aki nem írt házi feladatot csakis fiú lehet. Tudjuk, hogy a 17 fiú közül összesen 4-en nem írtak leckét. Vagyis a 13 leckét író fiú közül kell kettőt, és a 4 leckét nem író fiú közül kell szintén kettőt kiválasztani. Ez összesen  $\binom{3}{1} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2} = 1404$  eset.

Vagyis  $\frac{1404}{7140} \approx 0,1966$  a valószínűsége annak, hogy a választott tanulók közül pontosan kettőnek nincs kész a házi feladata.

8. Egy 27 méter széles folyó partjától merőlegesen haladva 3 méterenként megmértük a víz mélységét. A következő adatokat kaptuk centiméterben: 60, 120, 150, 240, 210, 180, 90, 30.

a) Hány  $\text{m}^2$  a keresztmetszet területe, ha a folyómeder alján két mérőhely között az összekötővonalat egyenesnek feltételezzük?

b) A mért adatoknak határozzuk meg a számtani közepét és a mediánját.

c) Mennyi a mérés vonalában a folyó átlagos mélysége?

d) Mekkora vízmennyiség halad át a folyó keresztmetszetén 1 óra alatt, ha a folyó sebessége  $85 \text{ m/perc}$ ? (16 pont)

**Megoldás.** a) Két háromszög és hét trapéz területösszegét kell meghatároznunk:

$$T = 3 \cdot \left( \frac{0,6}{2} + \frac{0,6 + 1,2}{2} + \frac{1,2 + 1,5}{2} + \frac{1,5 + 2,4}{2} + \frac{2,4 + 2,1}{2} + \frac{2,1 + 1,8}{2} + \frac{1,8 + 0,9}{2} + \frac{0,9 + 0,3}{2} + \frac{0,3}{2} \right),$$

azaz  $T = 32,4 \text{ m}^2$ .



b) Az adathalmaz számtani közepe:  $1,35 \text{ m}$ . Az adatok sorba rendezése után az  $1,2$  és az  $1,5 \text{ m}$  áll középen, vagyis a medián is  $1,35 \text{ m}$ .

c) Ha a folyó keresztmetszetének területét elosztjuk a folyó szélességével, akkor azt az értéket kapjuk, amellyel, mint „átlag”-gal meghatározhatjuk a folyó keresztmetszetén 1 óra alatt áthaladó víz mennyiségét. Most ez  $\frac{32,4}{27} = 1,2$  méternek adódik.

d) A folyó keresztmetszetének területe:  $32,4 \text{ m}^2$ . Mivel a sebessége  $85 \text{ m/perc}$ , azért 1 óra alatt  $5100$  métert halad a folyó. A keresztmetszetén  $5100 \cdot 32,4 = 165\,240 \text{ m}^3$  víz halad át óránként.

9. Az azonos kerületű konvex négyszögek esetén a két-két szemközti oldal összegének szorzata milyen esetben lesz maximális? Határozzuk meg ezt a maximális értéket. (16 pont)

**Megoldás.** Jelöljük az oldalak hosszát a szokásos  $a, b, c$  és  $d$  betűkkel. Ekkor  $k = a + b + c + d$ . A feladat szövege szerint az  $(a + c)(b + d)$  szorzatot kell vizsgálnunk.

Írjuk fel  $(a + c)$ -re és  $(b + d)$ -re (két pozitív számra) a mértani és a számtani közép közötti összefüggést:

$$\sqrt{(a + c)(b + d)} \leq \frac{(a + c) + (b + d)}{2} = \frac{k}{2}.$$

Ebből következik, hogy

$$(a + c)(b + d) \leq \frac{k^2}{4}.$$

A szorzat akkor a legnagyobb, ha egyenlő  $\frac{k^2}{4}$ -gyel. Az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha  $a + c = b + d$ . Vagyis az azonos kerületű konvex négyszögek esetén a két-két szemközti oldal összegének szorzata érintőnégyszögek esetén lesz maximális. Ez a maximális érték  $\frac{k^2}{4}$ -gyel egyenlő.