A téglatest szimmetriái alapján a kérdéses összeg négy tagja egyenlő, továbbá $XY = 2\,GX$, így elég vizsgálnunk az $f(x) = GX + 2XA$ függvénynek (az összeg felének) változását, ha $GX = x$ a $[0, GE]$ intervallumban változik. Legyen $AB = 2b$ és $AE = e$, így

$$f(x) = x + 2\sqrt{(b-x)^2 + e^2}.$$

Deriváltja eltűnésének feltétele

$$f'(x) = 1 - \frac{2(b-x)}{\sqrt{(b-x)^2+e^2}} = 1 - \frac{2 \cdot XE}{XA} = 0,$$

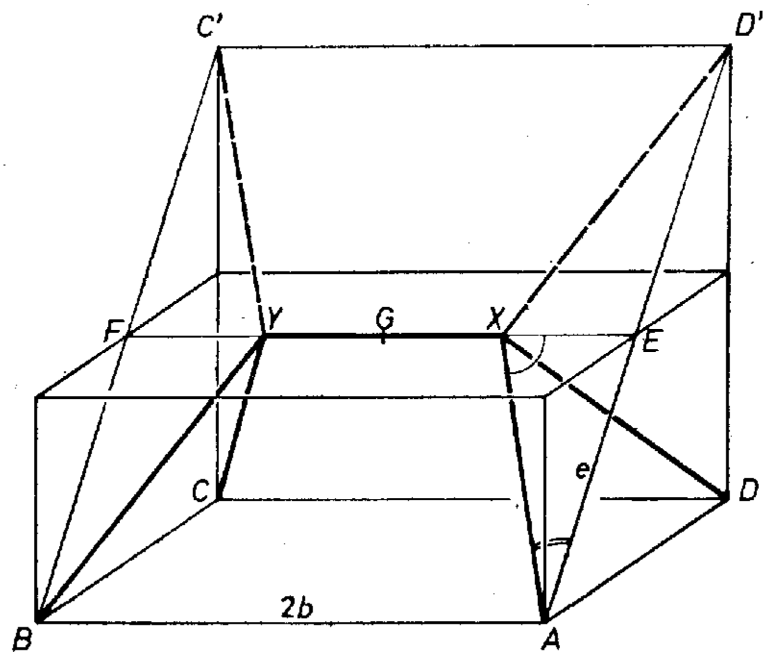
vagyis

$$\frac{XE}{XA} = \cos\ EXA\sphericalangle = \frac{1}{2}, \quad EXA\sphericalangle = 60^\circ.$$

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha – visszatérve a változó használatára és figyelembe véve a mondott értelmezési tartományt –

$$\frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2+e^2}} = \frac{1}{2}, \qquad x = b - \frac{e}{\sqrt{3}} \geqq 0, \qquad b \geqq \frac{e}{\sqrt{3}};$$

szavakban: ha a GEA síkban AE-vel 30°-os szöget bezáró egyenes a fedőlap középvonalát E és G közötti X pontban metszi, függvényünknek csak ebben az esetben lehet szélső értéke az intervallum belsejében, illetve éppen G-ben.



Mindenesetre $f'(b) = 1 > 0$. Ha X a GE szakasz belsejében keletkezett, akkor $EGA\sphericalangle < EXA\sphericalangle = 60^\circ$, és így

$$f'(0) = 1 - \frac{2b}{\sqrt{b^2+e^2}} = 1 - 2\frac{GE}{GA} = 1 - 2\cos EGA\sphericalangle < 0,$$

tehát $f'(x)$ az intervallumban növekvő, negatívból pozitívba megy át, és így $f(x)$-nek minimuma van a talált helyen. Ha pedig az $f'(x) = 0$-t adó helyre $x < 0$, és ide értve $x = 0$-t is, akkor $f(x)$ a $[0,\ GE]$ intervallumban növekedő, tehát minimuma $x = 0$ mellett van, amikor X azonos G-vel.

Megjegyzések. 1. Ismert síkbeli feladatba megy át $2 \cdot AX + XG$ minimumának a kérdése, ha D helyett a fedőlap síkjára való D' tükörképét vesszük, másrészt egyelőre nem korlátozzuk X-et az EF egyenesre, csak az AGD' háromszög síkjára. Ismeretes, hogy így az $XA + XG + XD'$ összeg a háromszög ún. *izogonális* (magyarul: egyező látószögű) *pont*jára a legkisebb, amelyből az AXG, GXD' és $D'XA$ látószögek közös értéke 120°. Ez a pont azonban csak akkor létezik, ha a háromszög egyik szöge sem nagyobb 120°-nál; ha viszont van ilyen szög, akkor annak a csúcsára minimális az összeg és a látószögek ilyenkor nem egyenlők. – Esetünkben $GA = GD'$ miatt csak G-ben lehet szó ilyen szögről, éppen ennek esetét zárta ki (emelte ki) a megoldás. – Az AGD' háromszög tengelyes szimmetriája alapján az izogonális (régebbi nevén: Torricelli-féle) pont az EG magasságra esik.

2. Visszatérve az eredeti feladatra, kérdésünk rokonságban áll az A, B, C', D' (egy síkbeli) pontok közti minimális összhosszúságú úthálózat kérdésével (lásd a P.20. problémát, K. M. L. 39 (1969) 215. old., továbbá speciális esetre a Gy. 1317. gyakorlatot, 44 (1972) 112. old.).

3. Könnyen adódik az a sejtés, hogy ha az EF középvonalon nem találtunk X (és Y) pontot, akkor a fedőlap AD-vel párhuzamos középvonalán lesz megfelelő pont.

4. A feladat tekinthető a következő (egyszerűsített) gyakorlati probléma részének: két egymásra merőleges irányú (különböző szélességű) csatorna egy várost 4 részre tagol. Olyan gyaloghidat kívánunk a keresztezés fölött lépcsőfeljárókkal, amely a város bármely két része közt összeköttetést létesít. (Magasságát a hajózás szabja meg. Ekkor persze a lépcsők meredeksége is figyelembe veendő.)