Az alábbi feladatokat bárki megoldhatja foglalkozásra és életkorra való tekintet nélkül. Tulajdonképpen nem is kell a feladatokat megoldani a szó hagyományos értelmében, elég megtippelni az eredményt. A tippeket a mellé-kelt szelvényen vagy hozzá hasonló táblázatban lehet beküldeni. Határidő : 1976. november 20. Címünk KÖMAL/OKTOTÓ, 1443 Budapest, Postafiók 129.

A számtotó feladataira beküldött tippeket a következő képlet szerint értékeljük ki :

$$Q=\sum_{i=1}^{8} S_i(T_i-V_i)^2,$$

ahol T_i, V_i az i-edik feladatra adott tipp, illetve végeredmény, S_i a feladat nehézségétől függő szorzószám (általában $S_i=1$, ha azonban a feladat a vártnál nehezebbnek bizonyult, S_i 0,01 vagy akár 0,0001 is lehet, és Q a tippek pontosságát mérő kvadratikus eltérés. A győztes ebben a versenyben az lesz, aki a legkisebb Q-t éri el. A betűtotó győztese pedig az, akinek a legtöbb találata van. Ez a két verseny egymástól is, a pontversenytől is független. A beküldött szelvényeket kiértékelve visszaküldjük mindazoknak, akik szelvényükhöz megcímzett és bélyeggel ellátott válaszborítékot mellékelnek.

Számtotó

1. Mennyi az $A,\ B,\ C,\ D$ számok legnagyobbika, ha teljesül rájuk, hogy

$$A+10B+C=10,\qquad B+20C+D=20,\qquad C+30D+A=30,\qquad D+40A+B=40\,?$$

2. Mennyi az $a_0=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{3}\left(a_n^3+\sqrt[3]{a_n}\right)$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ feltételekkel meghatározott sorozat 100-adik tagja?

3. Két testvér egy 10 m sugarú, kör alakú telken osztozik. Az egyik lekaszálja, a másik a telek szélén levert cövekhez kötött kecskéjével legelteti le a telken nőtt lucernát. Hány méteres legyen a kecske kötele, hogy igazságos legyen az osztozás?

4. Írjunk egységnyi sugarú gömböket egy, két egység élű kocka csúcsai köré. Mekkora a sugara annak a gömbnek, amelyik még épp hogy elfér közöttük?

5. Legyen S azoknak az $(x,\ y)$ számpároknak a száma, amelyekben x is, y is egész, és

$$x^2+xy+y^2<1000.$$

Mennyi S ezredrésze?

6. Mennyi a $0<x\le 2,\ 0<y\le 3$ tartományban értelmezett

$$f(x,\ y)=x\frac{x^2+y^2}{x+y}$$

függvény maximuma?

7. A törökök megparancsolták, hogy Szolnok adóját a város bírója, papja, kántora, kovácsa és számadó juhásza közül választott küldöttség vigye Budára. Azt is előírták, hogy egy-egy küldöttségnek legalább két tagja legyen, és megtiltották, hogy különböző alkalmakon azonos összetételű küldöttség szerepeljen. Legfeljebb hányszor fizethettek adót a szolnokiak?

8. Hány fokkal volt magasabb Budapesten a hőmérséklet napi középértéke 1976. július 15-én a százéves átlagnál?

Betűtotó

1. Melyik az $A,\ B,\ C,\ D$ számok legnagyobbika, ha teljesül rájuk, hogy

$$A+10B+C=10,\qquad B+20C+D=20,\qquad C+30D+A=30,\qquad D+40A+B=40\,?$$

2. Tekintsük az $a_0=1$, $b_0=\frac{1}{3}$,

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}\left(a_n^3+\sqrt[3]{a_n}\right);\qquad b_{n+1}=\frac{1}{3}\left(b_n^3+\sqrt[3]{b_n}\right);\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

feltételekkel meghatározott sorozatokat, és legyen $\Delta=|a_{100}-b_{100}|$. Melyik igaz az alábbi négy állítás közül?

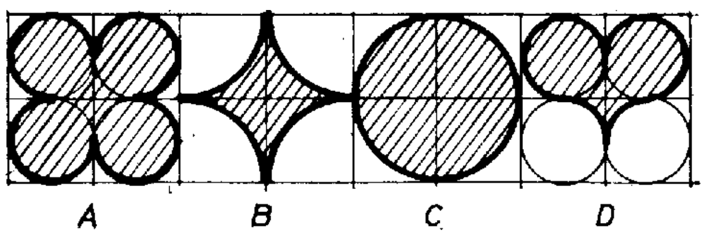
A) $\Delta\le 0{,}001$; *B)* $0{,}001<\Delta\le 0{,}01$; *C)* $0{,}01<\Delta\le 0{,}1$; *D)* $0{,}1<\Delta$

Beküldhető 1976. november 20-ig

Címünk: KÖMAL/OKTOTÓ
1443 Budapest, Postafiók 129

SZÁM	KÓD	TIPP
1.	Legnagyobb gyök	
2.	Száz köbgyökvonás	
3.	Két testvér kecskéje a körben	
4.	Nyolc gömb közti gömb sugara	
5.	Rácspontok számának ezrede	
6.	$(x^3+xy^2)/(x+y)$ maximuma	
7.	Szolnok adója	
8.	Hány fokkal volt melegebb ?	
	KVADRATIKUS ELTÉRÉS	

3. Az ábrán bemutatok néhányat anyám tésztaszaggatói közül. Melyiket használja anyám, ha kevés tésztát szeretne újragyúrni ?



4. Legyen r a számtotó 4. feladatának az eredménye. Melyik igaz az alábbi négy állítás közül ?

$$A) r \leq 0{,}9;\ B)\ 0{,}9 < r \leq 1;\ C)\ 1 < r \leq 1{,}1;\ D)\ 1{,}1 < r.$$

5. Hogy hívják a koordináta-rendszer $x^2+xy+y^2=1000$ egyenletű görbéjét ?

A) asztroid; *B)* kör; *C)* ciklois; *D)* valami más.

Beküldhető 1976. november 20-ig.

Címünk: KÖMAL/OKTOTÓ
1443 Budapest, Postafiók 129.

A BEKÜLDŐ ADATAI

Neve:..................

....

Címe: ....

....

Foglalkozása:...........

....

Iskolája:...............

....

SZÁM	KÓD	TIPP
1.	Melyik a legnagyobb?	
2.	Perturbáció	
3.	Tésztaszaggatók	
4.	Kilencedik gömb	
5.	Hogy hívják?	
6.	Algebrai számok	
7.	Melyik téves?	
8.	Mi valószínűbb?	
	A TALÁLATOK SZÁMA	

6. Melyik igaz az alábbi négy állítás közül?

A) Vannak olyan $n,\ a_0,\ a_1,\ \ldots,$ egészek, amelyekre $n > 0,\ a_n \neq 0$, és

$$a_0 + a_1\pi + \ldots + a_n\pi^n = 0,$$

ahol π a Ludolf-féle szám.

B) Vannak olyan $n,\ a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ egészek, amelyekre $0 < n < 100,\ a_n \neq 0$ és

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0,$$

ahol $x = \sqrt[100]{1000}$.

C) Van olyan x valós szám, melyhez tetszőleges pozitív n egész mellett található olyan véges K szám és végtelen $p_i,\ q_i$ $(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ sorozat, amelyekre $p_i,\ q_i$, egész, és

$$\left|x - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{K}{q_i^n} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots).$$

D) Ha egy x valós számnak megvan a C-ben mondott tulajdonsága, akkor találhatók hozzá olyan $n,\ a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ egészek, melyekre $n > 0,\ a \neq 0$ és

$$a_0 + a_x + \ldots + a_nx^n = 0.$$

7. Melyik téves az alábbi négy állítás közül?

A) A hányados deriválásáról szóló szabály megtalálható G. W. Leibniz: Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, etc. című dolgozatában, mely az Acta Eruditorum című folyóiratban jelent meg 1684-ben, a 467-473. oldalakon.

B) A hányados deriválásáról szóló szabályt Londonban I. Newton már Leibniz előtt nyomtatásban közölte Philosophiae naturalis principia mathematica című művében.

C) A Cauchy-féle középértéktételt Cauchy 1829-ben közölte Lecons sur le calcul différentiel című munkájában.

D) Weierstrass analízisről szóló előadásaiban megmutatta, hogy van olyan mindenütt folytonos függvény, amely sehol sem deriválható.

8. Melyik a legvalószínűbb az alábbi négy esemény közül?

A) Két érmét feldobva, mind a kettő fejre esik.

B) Tíz érmét feldobva, 5 esik fejre.

C) Száz érmét feldobva, 50 esik fejre.

D) Száz érmét feldobva, 100 esik fejre.

A májusi oktotó nyertesei

A számtotó nyertese: *Zsigmond Géza* (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.), kvadratikus eltérése 0,0306. Jó eredményt értek el a következők: Köteles Zoltán (Budapest; 0,86), Major Zoltán (Budapest; 1,24), Peták Kálmán (Szolnok; 2,0823), Poronyi Gábor (Pécs; 4,00), Molnár Balázs (Budapest; 4,02), Gulyás Mihály (Orosháza; 6,11), Kovács Gábor (Pécsely; 8,54).

Ennél több, de 10^2-nél kisebb a Q-ja 5 beküldőnek; ennél több, de 10^4-nél kisebb 8-nak, ennél több, de 10^6-nál kisebb 1-nek; ennél több 1-nek.

A betűtotó nyertese: *Gubics József* (Székesfehérvár, Ságvári E. Szakközépiskola), találatainak száma: 6. Szintén 6 találatot ért el Baksai Róbert (Győr), Gulyás Mihály (Orosháza), Homonnay Géza (Budapest), Major Zoltán (Budapest) és Peták Kálmán (Szolnok), közülük sorsolással választottuk ki a nyertest. Öt találatot heten, négyet hatan, hármat négyen, kettőt négyen, egyet ketten értek el, és egy találat sem volt egy szelvényen.

Megjegyzések a májusi oktotóhoz

Módosított Kürschák. Az eredeti rekurzió $a_{n+1} = a_n + 1/a_n$ volt, és azt kellett belátni, hogy $a_0 = 5$-ből indulva az ezredik tag 45 és 45,1 között lesz. Ez a sorozat tart a végtelenbe, de a tagjai jól közelíthetők a $b_n = \sqrt{2n+25}$ sorozat tagjaival. (Érdemes megvizsgálni, mihez tart az $n(a_n - b_n)$ sorozat.) Márciusban a rekurziót $(a_n + 1/2a_n)$ -re módosítottam, ettől a sorozat konvergenssé vált, így a századik tagra már a 4-5-ödik tag jó közelítést adott. Egész más természetű a májusi $a_n - 1/a_n$ sorozat: ez se nem konvergál, se nem monoton, és nemhogy nem adható használható közelítés a tagjaira, de azok még számológépen sem számolhatók, ha csak a szokásos 8-10 értékes jeggyel dolgozunk. Ezért aztán a tippek között volt mindenféle: 182; 1529; -336; 2,43; és mínusz ötezer. De azért volt, aki 40,273-at tippelt: Molnár Balázs. Nem is vettem figyelembe ezt a feladatot a kvadratikus eltérésben, csak $S_3 = 0{,}0001$ súllyal. A betűtotóban emberi számítás szerint a D válasz a helyes, ezt vettem figyelembe a kiértékelésnél, de be kell vallanom, hogy ezt eddig nem sikerült bebizonyítanom.

Az OKTV példája. Legyen S, P, R rendre egy n-tagú mértani sorozat tagjainak összege, szorzata, és a tagok reciprokainak az összege. Kérdés, meghatározza-e P-t n, S és R? A tanulmányi versenyen óvatosságból fel volt téve, hogy a tagok pozitívak. És valóban, az óvatosság nem ártott. Legyen ugyanis n páratlan; $n = 2k+1$, és a a sorozat középső tagja, q a hányadosa. Akkor $S = as(q)$, ahol $s(q) = q^{-k} + \ldots + q^{-1} + 1 + q + \ldots + q^k$, $P = a^n$, $R = S/a^2$. Emiatt $a^2 = S/R$, tehát a feltételeknek eleget tevő sorozat csak akkor létezik, ha S és R azonos előjelűek (az $S = 0$ vagy $R = 0$ eset könnyen kizárható), és $P^2 = (S/R)^n$. Így már csak P vagy az a tag előjelét kellene meghatároznunk. Nyilván csak olyan a jöhet szóba, melyre az

$$s(q) = \frac{S}{a}$$

egyenlet megoldható. Belátható, hogy pozitív q-ra s-nek $q = 1$ mellett van minimuma, az SR szorzat pozitív négyzetgyöke (ez, vagy a (- 1)-szerese lehet S/a), tehát csak akkor ad megoldást, ha legalább n. Mivel $q > 0$ mellett $s(-q) < s(q)$, ilyenkor a negatív négyzetgyök is megoldást ad, tehát P lehet $\sqrt{(S/R)^n}$ is, és $-\sqrt{(S/R)^n}$ is, előjele nincs egyértelműen meghatározva. Ha azonban $1 \le \sqrt{SR} < n$, akkor $s(q)$ csak $-\sqrt{SR}$-rel lehet egyenlő, így P előjele egyértelműen meg van határozva. Tehát páratlan n mellett P-re szóbajöhető értékek száma S, R konkrét értékétől függően 2, 1 vagy 0 lehet. (Páros n-re ez a probléma nem lép föl, mert $n/2$ egész, tehát S/R $n/2$-edik hatványa egyértelműen meg van határozva.)

Folyamatos tőkésítés. Tegyük fel, hogy 100 Ft-ot teszünk egy olyan bankba, ahol évi 5 %-os kamatot adnak ugyan, de az évet n egyenlő részre osztják, minden időszak végén kiszámítják, mennyi volna az évi kamata a pillanatnyi vagyonunknak, és ennek az n-ed részét késedelem nélkül hozzácsapják a pénzünkhöz. Ha egy időszak elején vagyonunk V, az évi kamat 0,05 V, és miután ennek n-ed részét a vagyonunkhoz csapják, az $V\left(1 + \frac{0{,}05}{n}\right)$-re növekszik. Így száz év múlva

$$V_n = 100\left(1 + \frac{0{,}05}{n}\right)^{100n} = 100\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{5m}$$

forintunk lesz, ahol $m = 20\,n$. Az

$$a_m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

sorozat első néhány tagja:

$$a_1 = 2; \qquad a_2 = 2{,}25; \qquad a_3 = 2{,}37; \qquad a_4 = 2{,}44; \qquad a_5 = 2{,}49; \qquad a_6 = 2{,}52.$$

Belátható, hogy ez monoton nő, tehát már

$$V_1 > 100a_6^5 > 10\,000.$$

Viszont a sorozat tagjai kisebbek a monoton fogyó

$$b_m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

sorozat tagjainál, tehát tetszőleges n-re

$$V - n < 100b_1^5 = 102\,400.$$

Persze ennél jobb felső korlátok is adhatók V_n-re.

Megjegyzések: 1. Májusi számunkban hibásan közöltük E. Galois életrajzi adatát (216. old.). Helyesen: E. Galois 1811-1832.

2. Itt hívjuk fel olvasóink figyelmét, hogy ismét kapható Galois életéről és matematikai munkájáról szóló könyv; Leopold Infeld : Akit az istenek szeretnek címmel.

Tusnády Gábor

A májusi oktotó eredményei

SZÁM	SZÁMTOTÓ		BETŰTOTÓ	
1.	Tízszög átlói	161	14 alatt a 7	B
2.	1976 osztói	16	Minden ötödik	B
3.	Módosított Kürschák	40,275	Nem korlátos	D
4.	Köbreciprok	1,202	Van olyan	B
5.	x=100 sinx	63	14 842 Ft	C
6.	Peano-görbe	6,215	Zeta gyökei	B
7.	Hófehérke	3	Riemann	B
8.	Astória	4,630	Majdnem 5000	D