Az aranymetszés

Számrendszerünk, méréseink alapja az egyenlő részekre való osztás, például a kettes számrendszerben a felezés. Így kapunk egyre kisebb részeket, amelyekkel aztán tetszőleges adatot közelíthetünk. A kettes számrendszerben minden számjegy helyi értéke az előtte állóénak fele, és kétszer akkora, mint a mögötte állóé. Vizsgáljuk meg, mi történik, ha olyan helyi értékekkel dolgozunk, amelyek közül két szomszédos összege egy harmadikkal egyenlő. Például – az egységnyi helyi érték bal szomszédját A-val, jobb szomszédját a-val jelölve – ezekre és az 1-re teljesüljön

$$A = 1 + a. \tag{1}$$

Mivel azt most is meg szeretnénk tartani, hogy a szomszédos helyi értékek aránya állandó legyen, ez azt jelenti, hogy

$$a : 1 = 1 : (1 + a). \tag{2}$$

Ez nyilván legfeljebb csak egy pozitív a számra teljesülhet, hiszen ha egy a-ra teljesül, akkor minden $0 < x < a$ számra a (2) jobb oldala nagyobb, mint a bal oldala:

$$\frac{1}{1+x} > \frac{1}{1+a} = a > x,$$

és $x > a$ mellett sem állhat fenn egyenlőség:

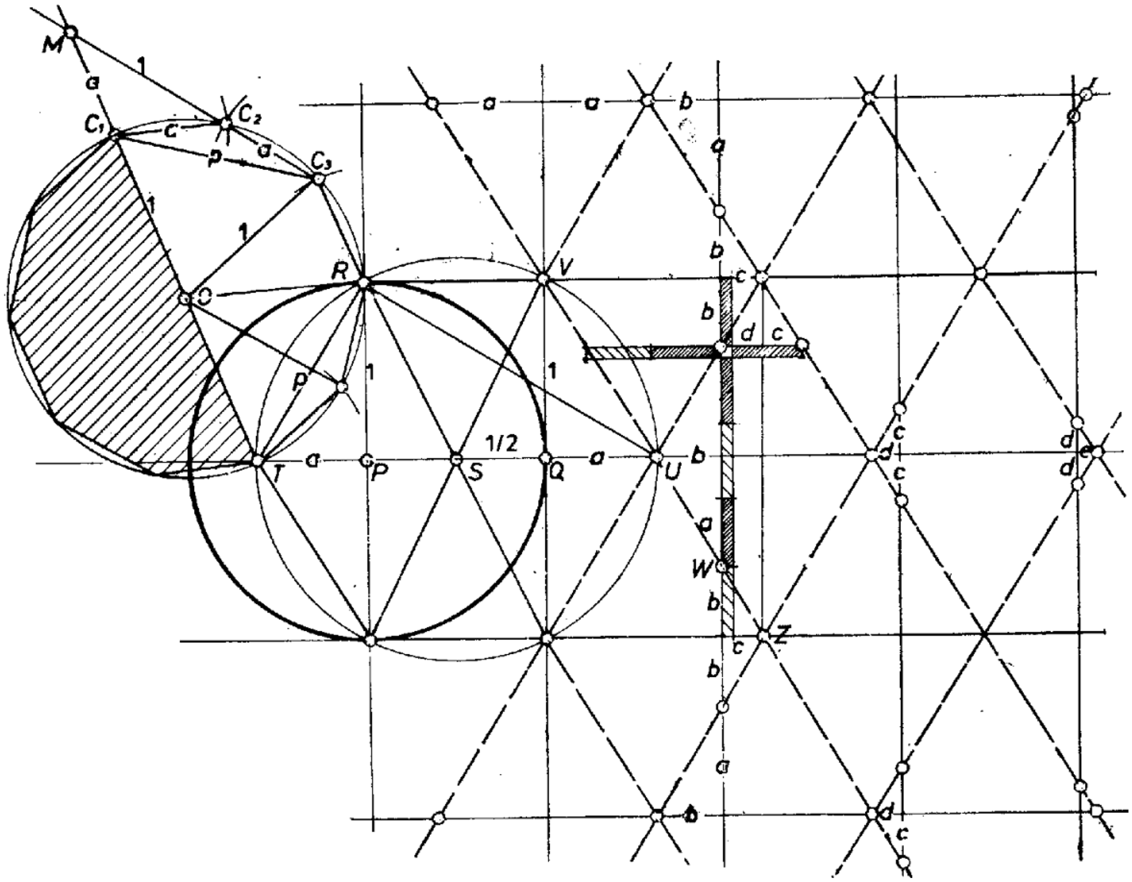
$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+a} = a < x.$$

Ez az ún. aranymetszés egyenlete, mellyel már a régi görögök is foglalkoztak a szabályos tízszög szerkesztésével kapcsolatban.

Mint ismeretes, ha C_1, C_2, C_3 az egységnyi sugarú, O középpontú körbe írt szabályos tízszög csúcsai, és C_2C_3 egyenese az OC_1 sugár meghosszabbítását M-ben metszi, akkor $MC_1 = C_1C_2$, és a C_3MO háromszög hasonló a C_2OC_3 háromszöghöz. Emiatt a $C_1C_2 = a$ számra épp a (2) egyenlet teljesül. Ha a C_1C_3 szakasz hosszát p-vel jelöljük, a C_3 pontnak a C_1 középpontú, M-en át-menő körre vonatkozó hatványa alapján

$$p^2 - a^2 = a(1 + a),$$

ami viszont (2) alapján 1-gyel egyenlő. Ennek alapján ha PQ, PR a P középpontú, egységnyi sugarú kör egymásra merőleges sugarai, és PQ felezőpontja S, akkor az S körüli, R-en átmenő kör PQ-nak P-n túli meghosszabbítását abban a T pontban metszi, amelyre $TP = a$, $TR = p$. Valóban, ha ez a kör PQ-nak Q-n túli meghosszabbítását U-ban metszi, akkor a TPR, RPU háromszögek hasonlósága alapján azt kapjuk, hogy a $TP = QU = a$ távolságra is teljesül (2), és a TPR háromszögben $1 + a^2 = p^2$.



Legyen V a PQR háromszöget négyzetté kiegészítő pont, és rajzoljuk meg a síkon azt a négyzetrácsot, amelynek ez az alapnégyzete. Vizsgáljuk meg, hogyan helyezkedik el ebben a négyzetrácsban az UV egyenes. Jelöljük az U-n túli meghosszabbításán keletkező első két metszéspontot W-vel és Z-vel, $(1-a)-t$ b-vel. Könnyen látható, hogy W is a, b részekre osztja a négyzetrács őt tartalmazó oldalát, és ha a Z-nél keletkező kisebbik szakaszt c-vel jelöljük,

$$c : b = b : a.$$

Ha tehát $(b-c)$-t d-vel jelöljük, azt kapjuk, hogy a c és d szakaszok ugyanolyan arányban osztják a b szakaszt, mint a és b az egységszakaszt. Emiatt

$$c = a - b,$$
$$d = b - c.$$

Hasonlóan tovább menve egy végtelen sorozatot kapunk, amelynek minden eleme az előző két elem különbsége. A másik irányban pedig az

$$A = 1 + a,$$
$$B = 1 + A,$$
$$C = A + B$$

tagokkal kezdve olyan sorozatot kapunk, amelynek minden tagja a megelőző kettő összege. Ha az UV egyenest tükrözzük a PQ, RV egyenesekre, és a kapott alakzatot lépésről lépésre tükrözzük ezekre az egyenesekre, egy végtelen hálózatot kapunk, amelynek a szemei a p oldalú rombuszok. Nevezzük aranymetszés származékoknak azokat a szakaszokat, amelyeket ennek a hálózatnak az elemei az eredeti négyzetrácsból kimetszenek.

Feladatok

A megoldásokat a következő címre lehet beküldeni: dr. Ada-Winter Péter, Munkaügyi Minisztérium Számítástechnikai Intézet, Budapest, Reguly A. u. 57–59. 1089. *Határidő:* 1978. november 10. A feladatok megoldását november 22-én beszéljük meg a szakkörön. 1. Mutassuk meg, hogy $2a = 2b + c + d + e$, $2 = 5b + e$. (Lásd az ábra kereszt alakú részét.) 2. Mutassuk meg, hogy $b = a^2$, $c = a^3$, és általában az $1,\ a,\ b,\ c,\ \ldots$ sorozat tagjai a hatványai. Hasonlóan A hatványai az $1,\ A,\ B,\ C,\ \ldots$ sorozat tagjai. 3. Mutassuk meg, hogy az aranymetszés származékok előállíthatók a véges sok (tetszőleges előjelű egész kitevőjű) hatványának összegeként. 4. Mutassuk meg, hogy két aranymetszés származék szorzata előállítható a véges sok (tetszőleges előjelű egész kitevőjű) hatványának összegeként. 5. Nevezzük arany-egészeknek mindazokat a valós számokat, amelyek előállíthatók a véges sok (tetszőleges előjelű egész kitevőjű) hatványának összegeként. Alakítsunk ki szubrutin-családot az arany-egészek közti műveletek elvégzésére. Legyen K és N általunk választott, a gépi konfigurációnak megfelelő természetes szám. Azokat az arany-egészeket fogjuk megengedettnek tekinteni, amelyek felírhatóak $\sum_{i=-N}^{N} c_i a^i$ alakban, ahol $|c_i| \le K$ egész szám. Minden egyes arany-egésznek feleltessünk meg egy $(2N+1)$ méretű tömböt, ebben tartsuk a $c_{-N},\ \ldots,\ c_{-1},\ c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_N$ együtthatókat.

a) Az `IDENT` nevű szubrutin két arany-egészről döntse el, hogy egyenlőek-e.

b) Az `ADD` nevű szubrutin adjon össze két arany-egészet. (Ha az eredmény nem megengedett szám, adjon hibajelzést, és állítsa le a futást.)

c) A `MULT` nevű szubrutin szorozzon össze két arany-egészet. (Hasonlóan adjon hibajelzést, ha kell.)

d) Mondjuk azt, hogy egy arany-egész kanonikus alakú, ha benne $|c_i| \le 1$, és a 0-tól különböző együtthatók előjele egyenlő. Írjunk szubrutint, amely tetszőleges arany-egészet kanonikus alakra hoz.

e) Írjunk szubrutint, amely tetszőleges valós számhoz megkeresi a hozzá legközelebb levő megengedett arany-egészet.

*

Az 1978. évi 5. számban kitűzött feladatok és megoldásaik

1. *Állítsa elő a harmadik, negyedik és ötödik gyököket közelítő sorozat Newton-Raphson képleteit.*

Megoldás.

$$x_{i+1} = \frac{1}{3}\left(2x_i + \frac{a}{x_i^2}\right); \qquad x_{i+1} = \frac{1}{4}\left(3x_i + \frac{a}{x_i^3}\right);$$
$$x_{i+1} = \frac{1}{5}\left(4x_i + \frac{a}{x_i^4}\right).$$

2. *Készítsen szubrutint, amely Newton-Raphson eljárással négyzetgyök közelítő értéket számít. Az* `NR2` *azonosítójú szubrutin átveszi az* `A`*-val jelölt alapot, a* `Q`*-val jelölt kezdőértéket és a hibakorlátot.*

Megoldás. A `MASTER PR15` csekély átalakításával (amelyet nem közlünk) az alábbi szubrutin is hívható:

```
ccc
      SUBROUTINE NR2(A,Q,EPS,B,N)
      WRITE (3,3)
      N=0
      X1=Q
2     IF(ABS(X1**2-A)-EPS)1,1,0
      X2=(X1+A/X1)/2.
      N=N+1
      IF(ABS(X1-X2)-EPS)1,1,0
      X1=X2
      GO TO 2
1     B=X2
      RETURN
3     FORMAT(///10X,23HNEWTON-RAPHSON MÓDSZER:)
      END
```

3. *Melyek a Newton-Raphson eljárás alkalmazhatóságának szükséges feltételei?*

Megoldás. Miután eddig tárgyalt példáink csak egyszerű hatványfüggvényekre szorítkoztak, a kérdés is csak ilyen függvényekre értendő. Ilyen esetekben, mivel a folytonosság, deriválhatóság és egyéb lényeges tulajdonságok adottak, elég kikötnünk, hogy a közelítés intervallumában az első derivált ne váljon sehol sem zérussá.