Ebben a rovatban havonta tíz-tíz olyan érdekes – könnyebb vagy nehezebb – feladatot mondunk el, amelyek előkészítőül szolgálnak a Matematikai Diákolimpiára. A feladatok megoldásait nem kérjük beküldeni, a megoldásokat sem fogjuk ismertetni. Az érdeklődők a feladatokkal kapcsolatos kérdéseikkel forduljanak a szerkesztőséghez. Leveleikre írásban válaszolunk.

1. Legyen a_n a $\sqrt{n}$-hez legközelebbi egész. Mennyi a következő összeg értéke:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{1980}}.$$

2. Az $ABCD$ konvex négyszög belsejében az M pont úgy helyezkedik el, hogy $ABMD$ paralelogramma. Bizonyítsuk be, hogy ha $CBM\sphericalangle = CDM\sphericalangle$, akkor $ACD\sphericalangle = BDM\sphericalangle$.

3. Mutassuk meg, hogy semmilyen pozitív m egészre sem lehet 1978^m-1 osztható (1000^m-1)-gyel.

4. Az R sugarú körbe egy S területű, n oldalú sokszöget írunk. Az n-szög minden oldalán kijelölünk egy pontot. Bizonyítsuk be, hogy az így kijelölt pontok, mint csúcsok által meghatározott sokszög kerülete legalább $2S/R$.

5. Legyen $f(x)=x^3-x+1$. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $m>1$ természetes számra az

$$m,\ f(m),\ f(f(m)),\ f(f(f(m))),\ \ldots$$

számok páronként relatív prímek.

6. Egy $n\times n$-es sakktábla egyik sarkában áll egy bábu. Két játékos felváltva tolja a bábut egy szomszédos mezőre. (Két mező szomszédos, ha van közös oldaluk.) Egy mezőre másodszor rálépni nem szabad. Az veszít, aki nem tud lépni.

a) Bizonyítsuk be, hogy ha n páros, akkor a kezdő tud nyerni, ha n páratlan, akkor a másik.

b) Melyik játékos tud nyerni, ha a bábu nem a sarokmezőről, hanem azzal szomszédos mezőről indul?

7. Bizonyítsuk be, hogy van olyan A szám, hogy az $y=A\cdot\sin x$ függvény grafikonjába legalább 1978 különböző oldalú négyzet beírható. (Egy négyzetet beírhatónak nevezünk, ha mind a négy csúcsa a görbén van.)

8. Három automata természetes számokból álló számpárokat nyomtat kis lapocskákra. Az első automata, ha egy $(a,\ b)$ kartont adnak neki, egy $(a+1,\ b+1)$ feliratú kartont ad ki; a második az $(a,\ b)$ karton mellé egy $(a/2,\ b/2)$ feliratú lapocskát nyomtat (csak akkor működik, ha a és b is páros); végül a harmadik két kártya, $(a,\ b)$ és $(b,\ c)$ mellé az $(a,\ c)$ kártyát is kiadja. Kezdetben egyetlen $(5,\ 19)$ feliratú kartonunk van. Kaphatunk-e az automatákat megfelelő sorrendben működtetve a) $(1,\ 50)$, b) $(1,\ 100)$ feliratú kartont?

c) Kezdetben egy $(a,\ b)$ feliratú kartonunk van, $a<b$, és egy $(1,\ n)$ feliratú kartont szeretnénk. Milyen n-re érhetjük ezt el?

9. Mutassuk meg, hogy van olyan korlátos $\{x_n\}$ sorozat, hogy bármely különböző k és m természetes számra

$$|x_m-x_k|\geqq\frac{1}{|k-m|}.$$

10. Adott két kupac gyufaszál, az egyikben m gyufa van, a másikban n , és $m>n$. Két játékos felváltva vesz a kupacokból. Egy lépésben a soron következő játékos egy kupacból tetszőleges (nullától különböző) számú gyufát vehet el, úgy hogy az elvett gyufák száma többszöröse legyen a másik kupacban lévő gyufák számának. Az a játékos nyer, aki valamely kupac összes gyufáját el tudja venni.

a) Bizonyítsuk be, hogy ha $m>2n$, akkor a kezdő tud nyerni.

b) Mely α értékekre igaz a következő állítás: ha $m>\alpha n$, akkor a kezdő játékos tud nyerni?