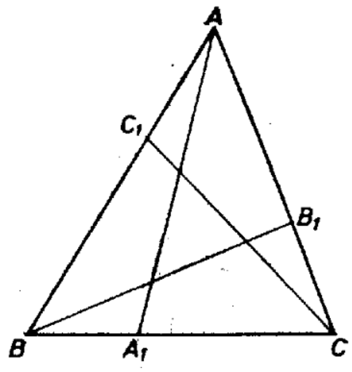

Jelöljük a $BA_1 : BC$ arány értékét λ-val ($0 < \lambda < 1$). A cosinus tételnek az AA_1 és $AC = b$ szakaszokra való alkalmazásával, a háromszögben szokásos jelölésekkel

$$AA_1^2 = c^2 + \lambda^2 a^2 + \lambda(-2ac\cos\beta) = c^2 + \lambda^2 a^2 + \lambda(b^2 - a^2 - c^2).$$

(1) alapján az is igaz, hogy $CB_1 : CA = AC_1 : AB = \lambda$, hiszen az arányok közös értéke $\mu = \lambda : (1 - \lambda)$ (és ez > 0, innen egyértelműen $\lambda = \mu(1 + \mu)$. Ennélfogva hasonlóan

$$BB_1^2 = a^2 + \lambda^2 b^2 + \lambda(c^2 - b^2 - a^2),$$
$$CC_1^2 = b^2 + \lambda^2 c^2 + \lambda(a^2 - c^2 - b^2),$$

így a vizsgálandó, a (2) közepén álló összeg:

$$AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2 = (1 - \lambda + \lambda^2)(a^2 + b^2 + c^2),$$

és ezt beírva, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ figyelembevételével elég bizonyítani az osztással adódó, az eredetivel ekvivalens

$$\frac{3}{4} \leqq 1 - \lambda + \lambda^2 < 1$$

kettős egyenlőtlenséget.

A középső kifejezést a jobb oldali számból, valamint a középsőből a bal oldali számot kivonva, egyaránt nem negatív kifejezést kapunk, ezzel bebizonyítottuk a feladat állítását:

$$\lambda - \lambda^2 = \lambda(1 - \lambda) > 0,$$
$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0.$$

Pontosabban megnézve azt kaptuk, hogy (2) első egyenlőtlenségében akkor és csak akkor teljesül egyenlőség, ha $\lambda = 1/2$, vagyis az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok a háromszög súly vonalai (tehát négyzetösszegük egyenlő az oldalak négyzetösszegének 3/4-szeresével). Továbbá (2) második egyenlőtlenségében nem teljesül egyenlőség, amíg A_1, B_1, C_1 az oldalak (azaz oldalszakaszok) belső pontjai. (Az viszont *semmitmondó*, hogy $\lambda = 0$, ill. 1 esetén egyenlőség áll, a két kifejezés csak jelölésben különbözik.)

Azt is látjuk, hogy $\lambda > 1$ esetén (A_1, ... a meghosszabbításokon) már nem érvényes (2) jobb oldali egyenlőtlensége.