A szakkör következő adásában **(a 3. műsorban, január 30-án 15.30–16.00 óráig)** *Surányi János* egyetemi tanár azzal ismerteti meg a *veszprémi Lovassy László Gimnázium szakkörét* és a hallgatókat, hogy

Mi a teljes indukció?

Rokon jelenségeket megfigyelve igyekszünk felfedezni bennük a közös törvényszerűséget. Ha találunk ilyet, annak érvényességét egyrészt újabb hasonló helyzetek létrehozásával ellenőrizhetjük. Közvetettebb mód a következmények levonása és annak ellenőrzése, hogy teljesülnek-e ezek vagy sem. Ha szükséges, alkalmasan módosítjuk a feltételezett törvényszerűséget. Ezt a módszert nevezik *indukciónak*. A természettudományoknak alapvető módszere ez, de a matematikában is gyakran sejtenek meg összefüggéseket indukció útján.

A matematikus azonban nem állhat meg törvényszerűségek megfigyelésénél. Azokat csak akkor fogadhatja el korlátlanul érvényesnek, ha ennek okát tudja adni, be tudja bizonyítani őket. Miután elvont fogalmakkal dolgozik, amelyek kapcsolatát a logika szabályozza, erre kilátása is van.

Természetes számokra vonatkozó állításoknak egy jellegzetes bizonyításmódja lényegében azon alapszik, hogy minden természetes számhoz eljutunk, ha elindulunk az 1-től és minden egész számról a rákövetkezőre térünk. Ezt a bizonyításmódot nevezik *teljes indukciónak*, bár alig fedezhető fel valami rokonsága az indukcióval.

Az adás rámutat vermekre is, amelyekbe bele lehet esni. Ezek elemzésével mélyebben megvilágítja a módszer lényegét. Ugyancsak sokat árul el ennek a bizonyítási „automatának” a szerkezetéről az a példa, amelyben könnyebb egy többet mondó állítást bebizonyítani, mint a kevesebbet mondót.

Az adásban hallottak alkalmazására és gyakorlására a következő feladatok megoldását javasoljuk:

Feladatok.

1. Bizonyítsuk be, hagy ha n pozitív egész szám és a_1, a_2, …, a_n, (-1)-től különböző számok, akkor

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\ldots+\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}=$$
$$=1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}\,.$$

Milyen összefüggést ad ez, ha $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$?

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $\varphi\neq 2k\pi$ (k egész szám), akkor

$$\sin\ \alpha+\sin\ (\alpha+\varphi)+\ldots+\sin\ (\alpha+n\varphi)=\frac{\sin\left(\alpha+\dfrac{n}{2}\varphi\right)\sin\left(\alpha+\dfrac{n+1}{2}\varphi\right)}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}\,.$$

Milyen egyszerűbb alakra írhatjuk át a nyert összefüggés alapján a következő összeget:

$$\sin\ \varphi+\sin\ (3\varphi)+\ldots+\sin\ \big((2n+1)\,\varphi\big)?$$

3. Legyen n 3-nál nagyobb egész szám. Lássuk be, hogy ha egy konvex n-szög belsejének egy pontján sem megy át 2-nél több átló, akkor az egy csúcsból induló átlók a többit

$$f(n)=1\cdot(n-3)+2\cdot(n-4)+\ldots+(n-3)\cdot 1$$

pontban metszik.

Keressünk $f(n)$-re egyszerűbb formulát; igazoljuk a megsejtett formula helyességét!

4. (folytatás) Keressünk összefüggést az előző feladat feltételeinek teljesülése mellett az $(n+1)$-szög és az n-szög átlóinak a sokszög belsejébe eső metszéspontjai között.

Bizonyítsuk be, hogy az n-szög átlói metszéspontjainak a száma

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\,.$$

5. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\geq\frac{4^n}{2\sqrt{n}}\,.$$

6. Bizonyítsuk be, hogy van olyan n_0 pozitív egész szám, hogy ha n legalább n_0, akkor

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}<\frac{4^n}{\sqrt{2n+6}}\,.$$

Keressük meg a legkisebb ilyen n_0 értéket!

E feladatok megoldását a következő címre lehet beküldeni **február 13-ig:**
Az Iskolarádió Matematikai Szakköre
1800 Budapest, Bródy S. u. 5–7.

Azok között, akik legalább egy feladat helyes megoldását beküldik, könyvjutalmakat sorsolunk ki. Legszorgalmasabb feladatmegoldóinkat meghívjuk szereplőnek későbbi felvételeinkre.