Ebben a rovatban havonta tíz-tíz olyan érdekes – könnyebb vagy nehezebb – feladatot mondunk el, amelyek a Matematikai Diákolimpiára előkészítőül szolgálnak. A feladatok megoldásait *nem* kérjük beküldeni, és a megoldásokat sem fogjuk ismertetni.[1]

1. A térben adott 100, páronként metsző egyenes úgy, hogy semelyik három nincs egy síkban. Mutassuk meg, hogy van olyan pont, amin mindegyik egyenes átmegy!

2. Egy síkban fekvő n egyenes legfeljebb hány részre oszthatja a síkot? Egy síkban fekvő n négyzet legfeljebb hány részre oszthatja a síkot?

3. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számokra teljesül, hogy $a_i \leqq a_{i+1} \leqq 2a_i$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$. Mutassuk meg, hogy az

$$s = \pm a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n$$

összegben meg lehet az előjeleket választani úgy, hogy $-a_1 \leqq s \leqq a_1$ teljesüljön!

4. Mutassuk meg, hogy van olyan egész együtthatós polinom, amelynek egyik gyöke a $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{100}$ szám!

5. a) Egy 10 tagú társaságról tudjuk, hogy bármely három tagja közt van kettő, akik nem ismerik egymást. Mutassuk meg, hogy található a társaságban négy ember úgy, hogy közülük senki sem ismeri a másik hármat.

b) Mutassuk meg, hogy egy $\binom{n+k-2}{k-1}$ tagú társaságban vagy található n ember, hogy bármely kettő ismeri egymást, vagy található k ember, akik közül semelyik kettő nem ismeri egymást.

c) A térben adott 21 pont úgy, hogy semelyik négy nincs egy síkon. Bármely három által megadott háromszöglapot (mindkét oldalát) pirosra vagy kékre színezzük. Mutassuk meg, hogy mindenképpen lesz olyan tetraéder, melynek minden lapja azonos színű. Hány pontot kell vennünk, ha a háromszöglapokat három színnel színezhetjük ki, hogy akkor is mindig legyen egyszínű tetraéder?

6. Az $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1}\,(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ szabállyal definiált sorozatot Fibonacci-sorozatnak nevezzük.[2]

Igazoljuk a következőket:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_{n+2} - 1; \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{2i-1} = a_{2n};$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{2i} = a_{2n+1} - 1; \qquad \sum_{i=1}^{2n-1} a_i a_{i+1} = a_{2n}^2;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = a_n a_{n+1}; \qquad a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = (-1)^{n+1};$$

$$a_{p+q} = a_{p-1}a_q + a_p a_{q+1}; \qquad a_k | a_{k+2j} + a_{k-2j};$$

$$(a_p, a_q) = a_{(p,q)};$$

$a_n a_{n+3}$, $2a_{n+1}a_{n+2}$ és a_{2n+3} egy derékszögű hárosmszög oldalai.

7. Gyöngyünk van $2n$ különböző színben. Nyakláncot kell készítenünk úgy, hogy a szomszédos gyöngyök között minden színpár legalább egyszer előforduljon. Mutassuk meg, hogy a nyakláncot $2n^2$ darab gyöngyből elkészíthetjük. Elegendő-e a nyaklánchoz $2n^2 - 1$ darab gyöngy?

8. Írjunk egy kör kerületére $2^n\,(n \geqq 2)$ darab pozitív egész számot. Ezután a számok közé írjuk különbségük abszolút értékét, majd az eredeti számokat töröljük. Mutassuk meg, hogy az eljárást elég sokszor ismételve csupa nullát kapunk. Igaz-e az állítás akkor is, ha nem kettőhatványból indulunk ki?

9. Számítsuk ki a következő összeg egész részét:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{1\,000\,000}}.$$

Útmutatás: igazoljuk és használjuk fel az alábbi $-1 < \alpha < 0$ és $n, k \geqq 2$ esetén érvényes egyenlőtlenséget:

$$\frac{(n+k+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^\alpha + \ldots + (n+k)^\alpha < \frac{(n+k)^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

10. Bizonyítsuk be, hogy ha p és q egymástól különböző számokra $p + q = 1$, akkor

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n-i}{i} p^i q^i = \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}.$$

[1] A feladatmegoldásokkal kapcsolatos kérdéseikkel és problémáikkal az érdeklődők forduljanak a szerkesztőséghez. Leveleikre írásban válaszolunk.

[2] Leonardo de Pisa, más néven Fibonacci olasz matematikus 1200 körül élt, ez a sorozat az ő nevét viseli. A sorozat a következő, általa megoldott problémából keletkezett: Hány pár nyúl származhat egy évben egyetlen párból, ha minden pár havonta egy párt nemz, amely a második hónaptól kezdve lesz nemzőképes, és egyik ivadék sem pusztul el? Lásd például D. J. Struik: A matematika rövid története, 90. old.