

Azt mondjuk, hogy egy nyelv prefix, ha megvan a feladatban szereplő tulajdonsága. Tegyük fel, hogy a mumbo-jumbo törzs nyelvénél kevesebb betűvel nem állítható össze egy  $k$  szavas prefix nyelv teljes szójegyzéke. Egy  $A$ -ból és  $O$ -ból álló sorozat szabad, ha nem állítható elő úgy, hogy egy mumbo-jumbo szó végéről néhány betűt elhagyunk. Jelöljük a legrövidebb szabad sorozat hosszát  $h$ -val, a leghosszabb szót  $H$ -val. Mivel a nyelv szavai szabad sorozatok,  $h \leq H$ .

Legyen  $p$  egy tetszőleges  $H$  betűs szó, és  $\bar{p}$  az a sorozat, amelyet  $p$ -ből úgy kapunk, hogy utolsó betűje helyére a másik betűt tesszük. Ha  $\bar{p}$  nem lenne szó,  $p$ -nek elhagyhatnánk az utolsó betűjét, és a nyelv prefix maradna. Ez viszont ellentmondana annak a feltevésünknek, hogy kevesebb betűvel már nem lehet prefix szójegyzéket összeállítani,  $\bar{p}$  tehát szó.

Tegyük fel először, hogy  $h = H$ . Ekkor minden  $H$  elemű sorozat szó, különben az utolsó betűjét elhagyva is szabad sorozatot kapnánk. Tehát  $k = 2^H$ , és a teljes szójegyzék  $kH$ , betűből áll.

Megmutatjuk, hogy ha  $h < H$ , akkor a különbségük csak 1 lehet. Ebben az esetben ugyanis minden  $h$  elemű szabad sorozat szó, különben egy tetszőleges  $H$  betűs szóra kicserélve csökkenthetnénk a betűk számát a szójegyzékben. Ha viszont  $p$  egy  $h$  betűs szó és  $qA$ ,  $qO$  is  $H$  betűs szavak, akkor ezeket a  $pA$ ,  $pO$ , és  $q$  szavakra cserélve a nyelv prefix maradna, és a betűk száma ismét csökkenne a szójegyzékben, mihelyt  $H - h > 1$  volna.

Ha tehát  $h < H$ , akkor  $h$  értéke csak  $(H - 1)$  lehet. Jelöljük a  $h$  elemű szabad sorozatok számát  $s$ -sel. A többi  $h$  elemű sorozatból az  $A$  és  $O$  betűk hozzáírásával  $2 - 2^H$  betűs szót kapunk. Emiatt

$$k = s + 2(2^h - s) = 2^H - s,$$

és a teljes szójegyzék

$$hs + H(2^h - s) = kH - s$$

betűből áll, összefoglalva eredményeinket, elmondhatjuk, hogy ha  $2^H$  a legkisebb 2-hatvány, amelyik nem kisebb  $k$ -nál, akkor a mumbo-jumbo nyelv szójegyzéke legalább

$$kH + (2^H - k)$$

betűből áll.

*Megjegyzés.* Könnyű a minimális szójegyzéket explicite megadni. Megoldásunkban erre nem volt szükség, hiszen enélkül is tudjuk, hogy van minimális szójegyzék, és ennek betűszámát sikerült egyértelműen meghatároznunk anélkül, hogy a minimális szójegyzék konkrét alakját ismertük volna.