Az eloszlásfüggvény

Számok tetszőleges $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ összességét számcsoportnak nevezzük. Számcsoportot alkotnak például a dobókocka hat lapján található számok, a lottó e heti nyerőszámai, egy tanuló félévi osztályzatai, vagy egy osztály tanulói által egy nap szerzett jegyek. A számcsoport tagjainak a sorrendje nem lényeges, de az esetleges ismétlődések nem elhanyagolhatóak. Az $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ számcsoportot röviden ξ-vel jelöljük, az elemek számát $G(\xi)$-vel (jelölésünk mellett tehát $G(\xi) = n$). Egy adott számcsoport esetén érdemes megvizsgálni, hol helyezkednek el a tagjai, hogy adott típusú számok közül hány tartozik a csoporthoz.

A $\xi = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$ számcsoportnak a valós számok tetszőleges H részhalmazához tartozó gyakorisága a számcsoport azon tagjainak száma, amelyek H-nak elemei. Ezt a számot $G(\xi \in H)$-val jelöljük, és a mondott definíció formális alakja a következő:

$$G(\xi \in H) = \sum_{i=1}^{n} I(x_i,\, H),$$

ahol $I(x,\, H) = 1$, ha $x \in H$, és 0 különben. Ha a $\xi = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$, és $\eta = \{y_1,\ y_2,\ y_m\}$ számcsoporthoz tetszőleges H mellett ugyanaz a gyakoriság tartozik, akkor ξ azonos η-val. Ez nyilván csak úgy lehet, ha $n = m$, és az egyik számcsoportot megkaphatjuk a másikból, ha a tagjait alkalmas módon átrendezzük.

Érdekes kérdés, hogy egy adott számcsoport tagjait hányféle sorrendben írhatjuk fel. Ez attól függ, vannak-e egyformák a csoport tagjai között, és ha igen, miből mennyi van. Ezt viszont a Quetelet–görbéről olvashatjuk le. Ha ebben a

$$q_1 < q_2 < \ldots < q_j$$

számok fordulnak elő rendre

$$k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_j$$

gyakoriságokkal (azaz $k_i = G(\xi = q_i),\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ j$), akkor a számcsoportban a lehetséges átrendezések száma

$$\frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_j)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_j!}$$

(vö.: Kóczy T. László: A Pascal–tetraéder, KÖMAL 51. kötet, 1. szám, 1-9. o.). Közben már tovább is fejlesztettük a jelölésünket, amennyiben a $\xi \in H$ eseményt a konkrét egyelemű $H = \{q_i\}$ halmaz mellett a $\xi = q_i$ feltétellel jelöltük. Ezzel a lehetőséggel a továbbiakban is szabadon élünk, nevezetesen $G(a < \xi < b)$ tetszőleges $a,\ b$ mellett a ξ számcsoportnak a nyílt $(a,\ b)$ intervallumba eső tagjainak a számát fogja jelölni.

A $\xi = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$ számcsoport eloszlásfüggvénye a minden valós x-re, értelmezett

$$F(x) = \frac{G(\xi < x)}{G(\xi)}$$

függvény. Például $\xi = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ számcsoport néhány gyakorisága: $G(1 < \xi < 6) = 4,\ G(\xi$ páros szám$) = 3,\ G(\xi$ prímszám$) = 3,\ G(\xi$ összetett szám$) = 2$, és eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x < 0 \\ \frac{1}{6}[x], & \text{ha} \quad 0 \le x \le 6 \\ 1, & \text{ha} \quad x > 6, \end{cases}$$

ahol $[x]$ az x egész része. Emellett a számcsoportnak az átlaga

$$E(\xi) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3\frac{1}{2},$$

és szórásnégyzete

$$D^2(\xi) = \frac{1}{24}(5^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 5^2) = \frac{35}{12},$$

tehát $D(\xi) = \sqrt{\dfrac{35}{12}} = 1{,}71.$

Tetszőleges $\xi = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$ számcsoport segítségével készíthetünk véletlen számot úgy, hogy egy urnába n cédulát teszünk, és ezekre rendre az $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ számokat írjuk. Aztán kihúzunk egy cédulát az urnából, megnézzük, és visszatesszük az urnába. Majd jól elkeverjük a számokat, és hasonló módon újra húzunk annyiszor, ahány számra szükségünk van. Ezzel a módszerrel tetszőleges véletlen számot előállíthatunk, például a kockadobást a $\xi = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ számcsoporttal generálhatjuk. Generálhatnánk a $\xi = \{1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 6,\ 6\}$ számcsoporttal is, viszont a $\xi = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 6,\ 6\}$ számcsoport számai előbb–utóbb elárulnák, hogy készítőjük több hatost szeretne kapni, mint amennyi egy közönséges kockán várható volna.

Persze meg is fordíthatjuk a sorrendet, kaphatunk számcsoportot tetszőleges véletlen számból is. Ha az $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ számok egy véletlen szám egymás utáni aktuális értékei, a $\xi = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$ számcsoportot a véletlen szám realizációjának nevezzük. Egy realizáció átlagát és szórását tapasztalati átlagnak és tapasztalati szórásnak nevezzük, ezek maguk is véletlen számok, értékük realizációról realizációra változik. A számok számát a realizáció hosszának nevezzük, ennek növekedtével a tapasztalati átlag és tapasztalati szórás ingadozása csökken. Szakkör–sorozatunk fő célja épp e csökkenés vizsgálata.

Tetszőleges véletlen számmal játszható a következő játék. Választunk egy n természetes számot, és a játékosok egymástól függetlenül választanak maguknak egy F felső és egy A alsó számot, ezért fizetnek $(F-A)^2$ pontot. (Ha a véletlen szám értékei nagyok, $\left(\dfrac{F-A}{K}\right)^2$ pontot, ahol K alkalmasan választott konstans.) Aztán a véletlen szám n hosszúságú ξ realizációja alapján minden játékos $\dfrac{100}{n}G(A \le \xi \le F)$ pontot kap. A végén persze az nyer, akinek a legtöbb pontja van.

A mellékelt 5. feladatban mi a várható pontszámot egy nagyon nagy n mellett fogjuk meghatározni, olyan nagy n mellett, hogy a véletlen már ne is szólhasson abba bele, ki lesz a nyertes. Mert a nyertes az lesz, akinek az általunk számított várható pontszáma a legnagyobb.

Mikor igazságos egy játék?

Ketten játszhatják a következő játékot. A játékosok egy–egy számjegyet írnak egy cédulára, aztán egyszerre felmutatják a számukat. Ha ezek egyformák, az első játékos kap 35 Ft-ot, ha nem, a második kap annyi forintot, amennyi a két szám különbsége (abszolút értékben). Ki fog nyerni ebben a játékban?

Tegyük fel, hogy az első előre megír ezer cédulát. Ezek közül 131-re nullát, 109-re egyet, 95-re kettőt, 85-re hármat, 80-ra négyet, 80-ra ötöt, 85-re hatot, 95-re hetet, 109-re nyolcat és 131-re kilencet ír. A céduláit beleteszi egy urnába, és minden játékban onnan húz ki egyet, aztán vissza is teszi oda. Mit tehet a második, ha tudja, hogy mit csinál az első? Belátható, hogy nem sokat. Hosszú távon mindig az első lesz előnyös helyzetben. Ehhez persze meg kellett találni a mondott számokat, amelyekhez hasonlók keresése, reméljük, jó szórakozást nyújt majd az olvasóknak. (Bővebben ezekről Radnainé Szendrei Júlia: A játék matematikája című könyvében olvashatunk.)

Számcsoportok összege

Definíció. Két számcsoport összege az a számcsoport, amelynek tagjait úgy kapjuk, hogy az adott két számcsoport tagjait minden lehetséges módon párba állítjuk, és minden párban vesszük a számok összegét. Tehát a $\xi = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$ és $\eta = \{y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m\}$ számcsoportok összege a $\zeta = \{x_1+y_1,\ x_1+ +y_2,\ \ldots,\ x_1+y_m,\ x_2+y_1,\ x_2+y_2,\ \ldots,\ x_2+y_m,\ \ldots,\ x_n+y_1,\ x_n+y_2,\ \ldots,\ x_n+ +y_m\}$ számcsoport, amelynek $n \cdot m$ tagja van.

Tétel. Két számcsoport összegének átlaga egyenlő a számcsoportok átlagának összegével.

Bizonyítás. A definícióban bevezetett jelölések mellett

$$n \cdot m \cdot E(\zeta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i + y_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j = m\sum_{i=1}^{n} x_i + n\sum_{j=1}^{m} y_j = m \cdot nE(\xi) + n \cdot mE(\eta).$$

Tétel. Két számcsoport összegének szórásnégyzete egyenlő a számcsoportok szórásnégyzetének összegével.

Bizonyítás. A definíció jelölései mellett jelöljük $E(\xi)$-t $\overline{x}$-sal, $E(\eta)$-t $\overline{y}$-sal. Ekkor

$$nmD^2(\xi) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[(x_i - \overline{x}) + (y_j - \overline{y})]^2 = m\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y}) + n\sum_{j=1}^{m}(y_j - \overline{y})^2.$$

Itt a középső összeg egyenlő a $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})$ és a $\sum\limits_{j=1}^{m}(y_j - \overline{y})$ összegek szorzatával, ezek az összegek viszont 0-val egyenlőek.

A mellékelt 6. feladat $\xi = \{-1,\ 0,\ 1\}$ számcsoport önmagával képezett többszörös összegével kapcsolatos. Ennek részletes vizsgálata lesz utolsó adásunk témája, ezért kérjük a feladat megoldóit, vizsgálják meg a kapott számokat alaposan, milyen törvényszerűség fedezhető fel bennük.

5. feladat. Milyen határokkal játszaná a következő véletlen számokat? (A játékot a cikkben írjuk le.)

VÉLETLEN SZÁM	ALSÓ	FELSŐ
20 érmén a fejdobások száma		
14 kockán (mindegyiken 2 lap piros) a piros lapok száma		
13 kártya közt (melyeket 52-ből vettünk ki) a kőr lapok száma		
9 kockán (mindegyikén 1 lap piros) a piros lapok száma		
A legkisebb lottószám		
A lottószámok összege (K=10)		
5 kockán dobott számok összege		
20 érmedobásban a leghosszabb „tiszta fej" blokk hossza		
VÁRHATÓ PONTSZÁM		

6. feladat. Folytassa az alábbi táblázatot (minden szám a „felette" álló három szám összege).

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	6	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4	10	17	23	26	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27