Az optikai feladatok megoldásáról

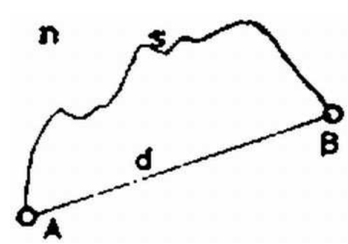
Ebben a számunkban egy hosszabb optikai feladatsorozat kitűzését kezdtük meg. A sorozat célja eljutni olyan problémák megoldásához, melyek már aránylag közel állnak az optika gyakorlati hasznosításához, az optikai eszközökhöz. A feladatok egy részének megoldásakor sokat egyszerűsít a Fermat–elv ismerete. Erről szól cikkünk első része. A második részben a vastag lencsékkel kapcsolatos alapvető fogalmakat foglaljuk össze, hogy a feladatokban ne csak a gyakorlati életben elő nem forduló „vékony” lencsékre legyünk korlátozva.

1. A Fermat–elv (legrövidebb idő elve) és a legképezési törvény

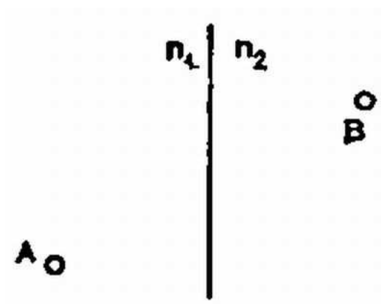
Egy optikai elem (tükör, lencse stb.) esetén a képalkotást úgy szokás definiálni, hogy a képpont az a pont, ahol a megfelelő tárgypontból kiinduló összes (helyesebben sok, a tárgypontból egy bizonyos térszögben induló összes) fénysugár találkozik. A képalkotásnak ez a megfogalmazása szolgál alapul a képpontok megszerkesztéséhez, illetve ebből lehet levezetni a képalkotási törvényeket is, a lencse-, ill. tükörtörvényt. Ez utóbbihoz természetesen szükséges ismerni a különböző törésmutatójú közegek határán áthaladó fénysugár törési vagy visszaverődési törvényét is.

A törési (visszaverődési) törvényt helyettesíthetjük a Fermat–elvvel: két pont között a fény mindig úgy halad, hogy útjához a lehető legkevesebb időre legyen szüksége. Ennek segítségével egyszerűen megfogalmazhatjuk a leképezés feltételét is. Mivel a leképezésben részt vevő fénysugarak valamennyien a tárgypontból indulnak és a képpontba érkeznek, útjukhoz egyenlő időre van szükség, mert különben a Fermat–elv szerint a legrövidebb időt igénylő sugármenet jöhetne csak létre.

Alkalmazzuk a Fermat–elvet, először a legegyszerűbb esetre: fény haladása homogén törésmutatójú közegben. A fénysugár áthalad az A és B pontokon (l. az 1. ábrát), amelyek távolsága d, a fény sebessége pedig c/n, ahol c a fény sebessége vákuumban, n az abszolút törésmutató. Mivel a fény sebessége állandó (c/n), ha az A ponttól B-ig megtett út s, a szükséges idő így $t = s/(c/n)$, ami akkor a legkisebb, ha $s = d$, azaz a fénysugár az A ponttól a B-ig egyenes vonalban halad, ellentétben az 1. ábrán rajzolttal.



1. ábra

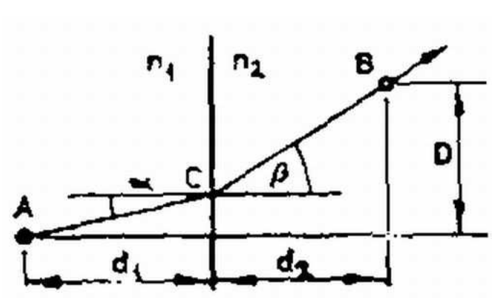


2. ábra

A 2. ábra olyan elrendezést mutat be, amelyben a törésmutató (azaz a fénysebesség) már nem homogén, hanem az egyik tartományban n_1, a másikban n_2, a két tartományt elválasztó felület pedig sík. Induljon a fénysugár az A pontból és haladjon át a B ponton is. Tudjuk, hogy a homogén törésmutatójú térrészben a fénysugár útja egyenes. Így egyetlen ismeretlenünk van, a határfelületen levő C pont helyzete, ahol a fénysugár áthalad (3. ábra).

Célszerű az A és B pontok helyzetét, illetve a C pont hozzájuk viszonyított helyzetét az α és a β szögekkel jellemezni (3. ábra). Legyen továbbá az A pont távolsága a határsíktól d_1, a B ponté d_2. A fénysugár sebessége az n_1 törésmutatójú közegben c/n_1, az n_2 törésmutatójúéban c/n_2. Így az AB út befutásához szükséges idő két részből áll:

$$T = \frac{d_1}{\sin\alpha} : \frac{c}{n_1} + \frac{d_2}{\sin\beta} : \frac{c}{n_2}.$$



3. ábra

Keressük t minimumát α és β függvényében, de még a

$$d_1 \cdot \text{tg } \alpha + d_2 \cdot \text{tg } \beta = D$$

feltételnek is teljesülnie kell. Felhasználva az

$$\frac{1}{\sin \beta} = \sqrt{1 + \text{ctg}^2 \beta}$$

azonosságot, a feltételből kifejezhetjük az $1/\sin \beta$ értékét:

$$\frac{1}{\sin \beta} = \sqrt{1 + \frac{d_2^2}{(D - d_1 \text{ tg } \alpha)^2}}.$$

vagyis az A-tól B-ig való haladás ideje

$$T = \frac{d_1 n_1}{c} \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{d_2 n_2}{c} \sqrt{1 + \frac{d_2^2}{(D - d_1 \text{ tg } \alpha)^2}},$$

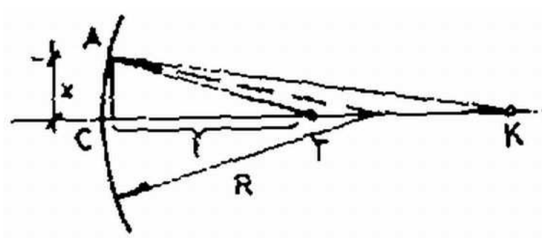
amelyből a szélsőérték megkeresésével (nem triviális feladat) kapjuk az ismert

$$\sin \alpha / \sin \beta = n_2/n_1$$

összefüggést.

Általában könnyebb a dolgunk, ha a Fermat–elvet egyszerű optikai elemek leképezésének vizsgálatára használjuk. Tekintsük például a domború tükör képalkotását. Legyen a tükör sugara R, a tükör optikai középpontjának (C) és a tárgypontnak (T) a távolsága t, a képpont (K) C-től mért távolsága pedig k (4. ábra).

Tekintsük u 4. ábrán megrajzolt feltételezett TAK sugármenetet. Erre a fény haladási idejének meghatározásához számítsuk ki először az utakat. Legyen az A pont távolsága az optikai tengelytől x. Ekkor



4. ábra

$$AT = \sqrt{x^2 + \left[t - (R - \sqrt{R^2 - x^2})\right]^2},$$
$$AK = \sqrt{x^2 + \left[k - (R - \sqrt{R^2 - x^2})\right]^2},$$
$$T = AT/c_1 + AK/c_1.$$

A szélsőérték számítás egyszerűen elvégezhető, ha végrehajtjuk a következő közelítő átalakításokat, melyek esetünkben ($x \ll t$, $x \ll k$) jó közelítéssel teljesülnek, feltéve, hogy az optikai tengellyel közel párhuzamos fénysugarakat vizsgálunk.

Így

$$AT = \sqrt{x^2 + \left[t - (R - \sqrt{R^2 - x^2})\right]^2} = \sqrt{t^2 + 2R^2 - 2Rt + 2(t - R)\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Ebben a kifejezésében

$$\sqrt{R^2 - x^2} = R\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} \cong \left(1 - \frac{x^2}{2R^2}\right),$$

ha $x \ll R$, így

$$AT \cong \sqrt{t^2 + 2R^2 - 2RT + 2R(t - R)\left(1 - \frac{x^2}{2tR^2}\right)} =$$
$$= t\sqrt{1 + \frac{t - R}{t^2 R} x^2} \cong t\left(1 + \frac{t - R}{2t^2 R} x^2\right) = t + \frac{t - R}{2tR} x^2,$$

ahol az utolsó átalakítást azzal a feltételezéssel hajtottuk végre, hogy $x^2 \ll t^2$, és $x^2 \ll tB$. Hasonlóképpen

$$AK \cong k + \frac{|k-R|}{2kR}x^2.$$

Így a fény útjának ideje a T és K pontok között

$$T = \frac{AT}{c_1} + \frac{AK}{c_1} = \frac{t}{c_1} + \frac{k}{c_1} + x^2\left(\frac{t-R}{2tRc_1} + \frac{k-R}{2kRc_1}\right).$$

A fentiek szerint a képalkotás feltétele az, hogy képalkotásban részt vevő, de különböző irányokban induló fénysugaraknak a tárgypontba való érkezéséhez szükséges idő ne függjön a kiindulási iránytól, azaz a T idő független legyen x-től. Ez csak úgy érhető el, ha x^2 együtthatója nulla:

$$\frac{t-R}{2tRc_1} + \frac{k-R}{2kRc_1} = 0$$

amiből

$$y$$

$$(1/t) + (1/k) = (2/R),$$

amit megfeleltetve a szokásos leképezési törvénynek:

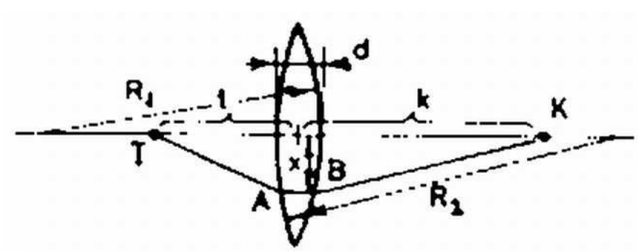
$$(1/t) + (1/k) = (1/f)$$

kapjuk. hogy

$$f = R/2$$

a fókusztávolság.

Nézzünk meg egy másik, hasonló példát: vizsgáljuk meg egy vékony lencse leképezési törvényét. Legyenek a lencse felületének görbületi sugarai R_1 és R_2 (5. ábra).



5. ábra

Keressük a T tárgypont képét, tegyük fel, hogy az éppen a K pont. Legyen T és K távolsága a lencsétől (vékony lencse: a lencse középvonalától) t és k. Mivel a lencse vékony ($d \ll t$; k; R_1; R_2) és csak a fény útjának idejére vagyunk kíváncsiak, feltehetjük, hogy a fény a lencsén belül párhuzamosan halad a tengellyel (az eltérés elhanyagolhatóan kis hibát ad – ezt a részletesebb számolás vagy átgondolás mutathatja ki). Legyen a fényút a $TABK$ út (5. ábra), legyen az: A és B pontok távolsága az optikai tengelytől x, továbbá legyen a lencse törésmutatója n, a környezetéé 1. A fény sebessége így a lencsén kívül c (fénysebesség vákuumban) a lencsén belül c/n.

Számítsuk ki először a TA úthosszat:

$$TA = \left[x^2 + \left(t - \frac{d}{2} + R - \sqrt{R^2 - x^2}\right)^2\right]^{1/2},$$

hasonlóan a gömbtükörnél végzett számításhoz. Az átalakításokat elvégezve kapjuk, hogy

$$TA \cong \left[\left(t - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(t - \frac{d}{2} - R_1\right)\frac{x^2}{R_1^2}\right]^{1/2},$$

ismét elvégezve a közelítő gyökvonást, kapjuk, hogy

$$TA = \left(t - \frac{d}{2}\right)\left(1 + \frac{t - \frac{d}{2} + R_1}{2\left(t + \frac{d}{2}\right)^2} \cdot \frac{x^2}{R_1^2}\right).$$

Hasonlóan

$$BK = \left(k - \frac{d}{2}\right)\left(1 + \frac{k - \dfrac{d}{2} + R_2}{2\left(k - \dfrac{d}{2}\right)^2} \cdot \frac{x^2}{R_2^2}\right).$$

Az üvegben megtett távolságot aránylag egyszerűen megkapjuk:

$$AB = d - \left(R_1 - \sqrt{R_1^2 - x^2}\right) - \left(R_2 - \sqrt{R_2^2 - x^2}\right).$$

átalakítva ($x \ll R_1$; R_2):

$$AB \cong d - \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

A fény $TABK$ útjához tartozó teljes idő:

$$T = \frac{TA}{c} + \frac{AB}{(c/n)} + \frac{BK}{c} = \frac{1}{c}\left[t + k \quad d + \frac{d}{n}\right] +$$

$$+\frac{x^2}{c}\left[\frac{t - \dfrac{d}{2} + R_1}{2\left(t - \dfrac{d}{2}\right)R_1^2} + \frac{k - \dfrac{d}{2} + R_2}{2\left(k - \dfrac{d}{2}\right)R_2^2} - \frac{n}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right].$$

Korábban már felhasználtuk, hogy $d \ll t$. $d \ll k$, most megint megtesszük. A leképezések feltétele, hogy x^2 együtthatója nulla legyen. Ezekből

$$(1/t) + (1/k) = (n-1)\big[(1/R_1) + (1/R_2)\big]$$

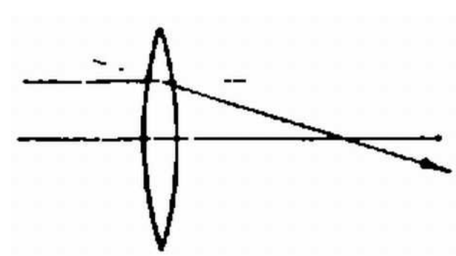
adódik, amelyet összevetve a lencsetörvénnyel

$$(1/f) = (n-1)\big[(1/R_1) + (1/R_2)\big]$$

adódik.

Ezen a néhány példán láttuk, hogyan kell használni a legkisebb idő elvét a leképezési összefüggések levezetésére. Sok esetben ez a legegyszerűbb, leggyorsabb számolási módszer, azonban nem mindig, néha más módszerrel hamarabb célhoz érhetünk. A Fermat–elv ilyen típusú alkalmazásánál azonban alapvető fontosságú, hogy biztosan jól végezzük a közelítő számításokat. És éppen ezért ez az elv szemléletesen és kvantitatíven is megadja, hogy miért és mennyire jók a leképezési törvények. (Nagy rekesznyílásnál torz lehet a felvétel, ha fényképezünk!)

II. A vastag lencsékről



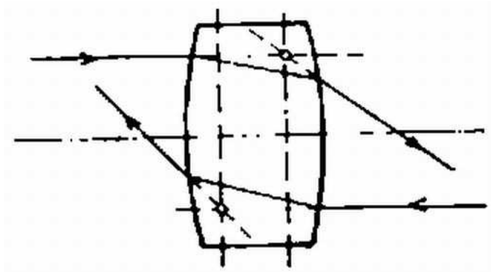
6. ábra

Az optikai eszközökben a lencsék gyakran nem tekinthetők „vékony” lencséknek, vastagságuk nem elhanyagolhatóan kicsi a görbületi sugarakhoz képest, rájuk az

$$(1/t) + (1/k) = (1/f)$$

összefüggés nem érvényes pontosan. Egyszerű mód van azonban arra, hogy ezeknél a lencséknél, amelyek lehetnek nagyon vastagok is, ezzel a kényelmesen használható összefüggéssel számoljunk, a képletben szereplő betűk jelentését azonban némileg pontosítani kell.

Vékony lencsénél $t = \infty$-re $k = f$ adódik, azaz a tengellyel párhuzamosan beeső fénysugarak a fókuszpontban találkoznak. A fókuszpont ezen definícióját vastag lencsére is fenntartjuk. Ilymódon tetszőleges vastag lencsére egyszerűen meghatározhatjuk a fókuszpont helyét mindkét oldalon. A szórólencsénél is a vékony lencséknél megszokott módon járunk el, itt negatív előjelű lesz a fókusztávolság. Vékony lencséknél, ha a lencsébe behatoló és a lencsét elhagyó sugár hosszabbításait megrajzoljuk, azok éppen a lencsében (a lencse középvonalában) metszik egymást (l. a 6. ábrát).



7. ábra

Vastag lencsénél a metszéspont legtöbbször nem esik középvonalba (ha egyáltalán definiálható lencseközép [7. ábra]), sőt sok esetben a lencsén kívülre esik, és főleg pedig a jobbra és balra haladó fényre a metszéspontok különböző síkra esnek. Ezt a két síkot hívjuk a lencse fősíkjainak. Természetesen ezek össze is eshetnek egymással, vagy egészen furcsa helyekre is kerülhetnek. Ha azonban a tárgy és képtávolságot (továbbá a fókusztávolságot) a megfelelő fősíktól mérjük, továbbra is használhatjuk az

$$(1/t) + (1/k) = (1/f)$$

összefüggést.

A fősíkok bevezetése és az azokkal való számolás természetesen nem oldja meg a lencsék leképezésének hibáit. Továbbra is csak a tengelyhez képest kis szögben hajló sugarakat engedhetünk meg, fellépnek a nagy szögből eredő leképezési hibák, a színhibák, de nem lép fel az a hiba, hogy a kis beesési szög ellenére is a tengelytől más távolságra hagyja el a lencsét a fénysugár vastag lencséknél. Ez azt jelenti, hogy az 5. ábrán az AB szakaszt nem vehetjük többé párhuzamosnak a tengellyel ($d \ll R_1$, R_2 többé nem teljesül), hanem hajlásának lényeges szerepe lehet. A fősíkok bevezetésével éppen ezt vesszük figyelembe. A fősíkok esetleges aszimmetrikus elhelyezkedése miatt a lencse nem lesz többé feltétlenül szimmetrikus: ez nem is meglepő, mert ha két „vékony” lencsét egymás közelébe helyezünk, „vastag” lencsét kaphatunk, ilyen pl. a távcső, nem mindegy, hogy melyik végén nézünk bele.

A vastag lencsék (lencserendszerek) számolásához az eddig ismert módszereket vagy a Fermat–elvet használhatjuk. A feladat dönti el, hogy melyik módszer a legcélravezetőbb, de mindenképpen a fősíkok meghatározása a legfontosabb feladat. Ehhez pedig legjobb a párhuzamosan beeső sugarak törését vizsgálni, vagy a leképezési törvényt átalakítani az ismert egyszerű összefüggések alakjára alkalmas fősíkok megválasztásánál.

Major János