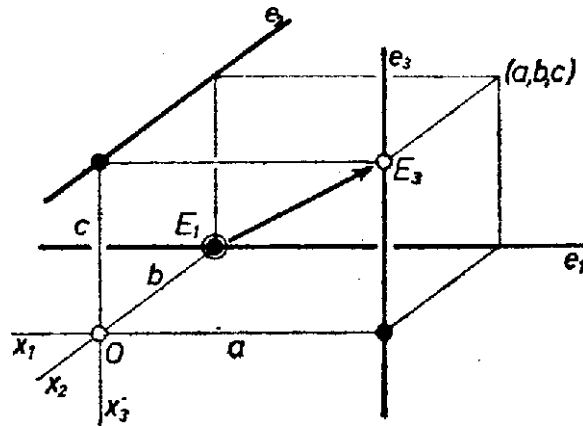


I. megoldás. Tegyük magunk elé egy téglatestet a szokásos beállításban. Ekkor egy, a föltevésnek eleget tevő egyeneshármast alkot a hátsó alapél (e_1), a bal oldali fedőél (e_2) és az elülső jobb oldalél (e_3) (1. ábra). Vegyük egy (térbeli) derékszögű koordináta-rendszer O origójául a bal elülső alsó csücsöt és az x_1, x_2, x_3 tengelyeket rendre e_1, e_2, e_3 -mal párhuzamosnak, továbbá legyenek a téglatest O -val átellenes csúcsának koordinátái a, b, c (egyik sem 0, különben legalább 2 tükrözési tengelyünk metszené egymást).



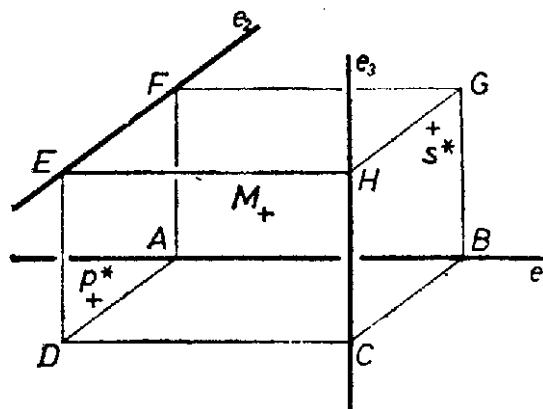
Egy térbeli pontnak egy egyenesre való tükrözése csupán síkbeli feladat, megkeressük a pontnak az egyenesre való vetületét és arra mint centrumra tükrözünk. – A $T(\alpha, \beta, \gamma)$ tárgypontra a $C(u, v, w)$ pontra való tükörképe pedig a $K(2u - \alpha, 2v - \beta, 2w - \gamma)$ pont, így lesz ugyanis $\overline{CK} = \overline{TC}$.

Esetünkben a $P(\alpha, \beta, \gamma)$ pontnak e_1 -re való tükrözésében a centrum $(a, b, 0)$, hiszen $PC \perp e_1$ miatt PC párhuzamos az x_2x_3 síkkal, az első koordináta egyezik P első koordinátájával, másrészt e_1 -nek az x_2x_3 koordinátságokra való vetülete a $(0, b, 0)$ pont, és így e_1 minden pontjának 2. és 3. koordinátája b , ill. 0 . Így $Q(-\alpha, 2b - \beta, -\gamma)$. Hasonlóan e_2 -nek az x_1x_3 síkra, majd e_3 -nak az x_1x_2 síkra való vetülete a $(0, 0, c)$, ill. az $(a, 0, 0)$ pont, ezért a második centrum $(0, 2b - \beta, c)$, tehát $R(-\alpha, 2b - \beta, 2c + \gamma)$, végül a 3. centrum $(a, 0, 2c + \gamma)$ és végeredményünk $S(2a + \alpha, -2b + \beta, 2c + \gamma)$.

Ezek szerint S koordinátái a P koordinátáiból rendre a $2a, -2b, 2c$ állandó (azaz P -től független szám) hozzáadásával állnak elő. Ez eltolást jelent, az eltolás vektorának komponensei éppen ezek a szakaszok. A vektort a maga egészében is szemléltethetjük a téglatesttől függetlenül is: $2\overline{E_1E_3}$, ahol E_1 az e_1 -ből a rá merőleges, e_2 -n átmenő sík metszi ki, és ugyanígy keletkezik E_3 , az 1-es index helyett 3-ast írva. Más szóval: e_1 -nek e_2 -hez legközelebbi pontjából a legrövidebb úton átmegyünk e_2 -re – ami e_3 irányú, $|c|$ nagyságú elmozdulás –, innen e_2 -n átmegyünk ennek e_3 -hoz legközelebbi pontjába – ami e_2 irányú, $|b|$ nagyságú elmozdulás, egyébként ugyanakkora az e_1 és e_3 távolsága –, végül ismét legrövidebben e_2 -ről e_3 -ra; az eltolásvektor az elmozdulások eredőjének 2-szerese.

Megjegyzések. 1. E_1 és E_3 leírásából látjuk, hogy adott e_1, e_2, e_3 egyenes-hármas egyértelműen meghatározza a felhasznált téglatestet.

2. Nem tetszetős, hogy az eredményben a b koordináta eltérő szerepet kapott az a és c egyező szerepétől. Ez azonban nem az origó helyének megválasztásán múlt, sem a tengelyek irányításán – egyébként a tengelyekre nem is mondtunk ki irányítást, ahogy a, b, c -re sem mondtuk, hogy pozitívok volnának. Ha a rendszert később választjuk az alakzathoz, az eredmény soha nem függhet a megválasztástól. És az sem lényeges, hogy a és c szerepe egyezőnek látszik, az $\overline{E_1E_3}$ irányításában már más az e_1 és e_3 szerepe. Az eredmény csak a tükrözések sorrendjén múlik, más sorrend mellett a téglatest másik-másik irányított testátlója adná az eltolásvektor felét, az a testátló azonban nem szerepelhet, amelyiknek egyik végpontja sincs rajta e_1, e_2, e_3 valamelyikén.



II. megoldás. Az e egyenesre való tükrözést tekinthetjük az e mint tengely körüli, 180° -os elfordításnak is (a két forgási irány bármelyike mentén). A tengely körüli, 2φ szögű elfordítás pedig felfogható két síkon való egymás utáni tükrözésnek, mindkét sík átmegy a tengelyen, az első tükörsíkot a másodikba átvivő elfordítás szöge φ , az irányt is beleértve; az egyik tükörsík a tengelyen át tetszés szerint választható. Esetünkben, $\varphi = 90^\circ$ alapján, a tükrözések sorrendje lényegtelen. (Mindezek könnyen beláthatók a megfelelő – ismert – síkbeli tételek alapján.)

Állítsuk elő ismét az előbbi téglatestet: vegyük e_1, e_2, e_3 mindegyikén át az a 2 síkot, amely merőleges a másik két tükrözési tengelyre. (Bármelyik ilyen 2 sík egymástól különböző, különben az egyenesek nem lennének páronként kitérők.) Legyen az $ABCDEFGH$ téglatesten a 3 tükrözési tengely rendre AB, EF és CH (2. ábra), ekkor a kívánt tükrözéssorozat eredménye ugyanaz, mint a test

$$ABF, ABD; \quad FEA, FEH; \quad HCD, HCB$$

lapsíkjaival való tükrözés eredménye. Könnyű belátni, hogy az első három tükrözés eredménye a 3 sík közös A pontjára való tükrözés, a további háromnak az eredménye pedig a H -ra való tükrözés. Így már az AH testátló és a P pont síkjában leírható a kívánt eljárás eredménye.

Most már az ismert (síkbeli) tétel alapján úgy kapjuk S -et P -ből, hogy ezt az első centrumból a másodikba vivő \overrightarrow{AH} vektor 2-szeresével eltoljuk.

Érdekes, egyszerű példa, ha P -ként a téglatest M középpontjának A -ra való tükörképéből indulunk ki.

Vigassy Lajos