1. Szerkesszünk adott n-szögbe olyan minimális kerületű n-szöget, amelynek csúcsai rendre az adott n-szög oldalegyenesekre esnek. (Az oldalegyenesek sorrendje azonos a csúcsokéval.) Bizonyítsuk be, hogy ha $n = 4$ és az adott négyszög húrnégyszög, akkor kerületének bármely pontja lehet ilyen minimális kerületű, négy csúcsával a négy oldalegyenesre illeszkedő négyszög csúcspontja. Jellemzi-e ez a tulajdonság a húrnégyszögeket?

2. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c egy háromszög oldalai, f_a, f_b, f_c a hozzá tartozó szögfelezők hossza, akkor

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{f_a}+\frac{1}{f_b}+\frac{1}{f_c}\right).$$

Mikor áll fenn egyenlőtlenség? Igaz-e az állítás szögfelezők helyett súlyvonalakra is?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c a háromszög oldalai, s_a, s_b, s_c a megfelelő oldalhoz tartozó súlyvonalak hossza, akkor

$$3\left[a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\right] \leq 9abc \leq 4as_a^2+4bs_b^2+4cs_c^2.$$

Mikor áll fenn egyenlőtlenség?

4. Az AB szakasznak ugyanazon a partján két körív van adva. A külső körívén végigfut egy P pont. P melyik helyzetében lesz minimális a PA és PB egyenes által a belső körívből levágott két körszelet együttes területe?

5. Adott négy pont a síkon, bármely három által meghatározott háromszög területe legföljebb egységnyi. Igazoljuk, hogy a négy háromszög beírt köre közül a legkisebbnek legföljebb $\sqrt{2}-1$ a sugara. Mikor lehet egyenlőség? Igaz-e ugyanez, ha azt követeljük meg, hogy a négy pont közül bármely kettő távolsága legföljebb kettő legyen?

6. A k kör AB átmérőjének egy P pontjában merőlegest állítunk AB-re. A merőleges egy S pontját összekötjük az átmérő közelebbi végpontjával, B-vel. BS a k kört Z-ben metszi másodszor, ZP pedig Q-ban. Melyik a nagyobb a QP és a BS szakaszok közül?

7. Az ABC háromszög AB oldalához írt kör érintse az AB oldalt D-ben, az AC oldalegyenest E-ben. Az AC oldalhoz írt kör érintse az AC oldalt F-ben. BF és CD egyenesek N metszéspontján keresztül húzzunk párhuzamost AC-vel, az A csúcson keresztül pedig BF-fel. Bizonyítsuk be, hogy ez a két egyenes a DE egyenesen metszi egymást.

8. Az ABC háromszög beírt köre az AB, AC, BC oldalakat rendre a D, E, F pontokban érinti. EF az AB egyenest P-ben metszi. P-ből a körhöz húzott másik érintő D'-ben érinti a kört. Igazoljuk, hogy D, D', C kollineáris. (Feltesszük, hogy $AC \neq BC$.)

9. Igazoljuk, hogy az előző feladat jelöléseit alkalmazva, AF és BE egyenes G metszéspontjának a három oldaltól vett x, y, z távolságára

$$x:y:z=\frac{1}{1+\cos\alpha}:\frac{1}{1+\cos\beta}:\frac{1}{1+\cos\gamma},$$

ahol α, β, γ a háromszög szögei.

10. Az előző két feladat jelöléseit alkalmazva, adott az ABC háromszög beírt köre, a D érintési pont és az AF, BE egyenesek G metszéspontja. Szerkesszük meg a háromszöget.

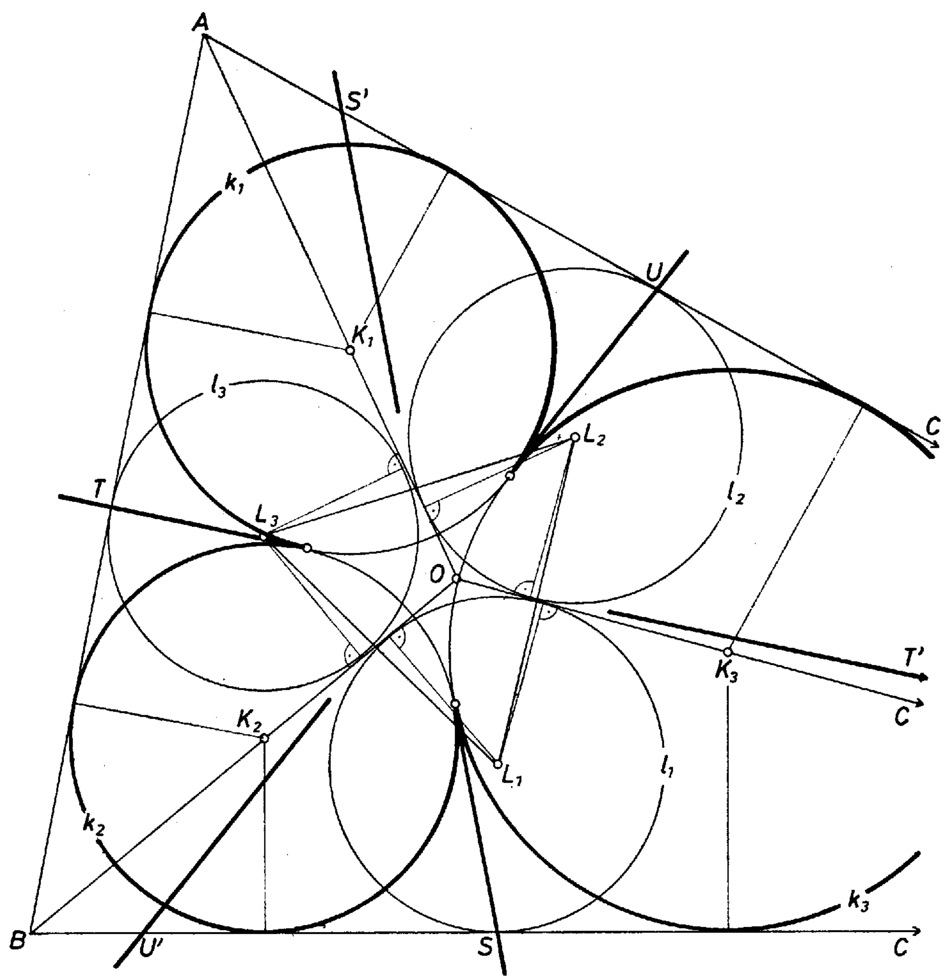
11. Adott a síkon három, közös pontból induló félegyenes, a, b, c és adott három pont, P, Q, R. Szerkesszük meg azt a háromszöget, amelynek három oldala a három adott pontra, a három csúcsa a három adott félegyenesre illeszkedik.

12. Az ABC háromszög köré írt kör B és C pontbeli érintője a P pontban találkozik. Igaz-e, hogy ha a PA egyenest tükrözzük a BAC szög felezőjére, a kapott egyenes átmegy az ABC háromszög súlypontján?

13. Húzzunk párhuzamost a parabola tengelyével két érintőjének, e-nek és f-nek A metszéspontjából. Legyen ez a párhuzamos g, a parabola fókusza F. Bizonyítsuk be, hogy FA és f szöge egyenlő e és g szögével.

14. Az egymásra merőleges OX és OY egyenesen fut az A, ill. a B pont úgy, hogy $OA+OB$ állandó. Az O-n átmenő, AB-vel párhuzamos egyenes az ABO háromszög köré írt kört másodszor az M pontban metszi. Mi az M pont mértani helye? Milyen alakzatot burkol az AB szakasz mozgás közben?

15. Malfatti olasz matematikustól származik a következő feladat: Adott ABC háromszögben szerkesszünk egymást érintő k_1, k_2, k_3 köröket úgy, hogy k_1 érinti az AB, AC oldalakat, k_2 érinti az AB, BC oldalakat és k_3 érinti az AC, BC oldalakat. Steiner német matematikus Malfatti feladatára a következő megoldást adta:



„Legyen O az ABC beírt körének középpontja, l_1, l_2, l_3 legyen a BOC, COA, AOB háromszög beírt köre. Húzzuk meg e három kör közül bármely kettőnek a másik belső közös érintőjét, messék ezek az oldalakat rendre az S, S', T, T', U, U' pontokban (l. az ábrát). Az ATT', BUU', CSS' háromszögek beírt köre megfelel k_1, k_2, k_3 körnek."

Helyes-e Steiner megoldása?