Azt kell igazolnunk, hogy az

$$x^2 + x + n = y^2 \tag{1}$$

egyenletnek, megfelelő n választása esetén legalább N megoldása van. (1) ekvivalens azzal, hogy

$$(2y - 2x - 1)(2y + 2x + 1) = 4n - 1. \tag{2}$$

Próbáljunk $4n - 1$ értékéül olyan számot választani, melyet legalább N különböző módon fel tudunk bontani két páratlan egész szám szorzatára. Ez a helyzet például a $3 \cdot 5^N$ szám esetében, minden $0 \leqq k \leqq N$-re megfelelő felbontás a $(3 \cdot 5^k) \cdot 5^{N-k}$. Ezeket (2) megfelelő tagjaival egyenlővé téve

$$\begin{aligned} 2y_k - 2x_k - 1 &= 3 \cdot 5^k, \\ 2y_k + 2x_k + 1 &= 5^{N-k}, \\ 4n - 1 &= 3 \cdot 5^N; \end{aligned}$$

ahonnan x_k-ra, y_k-ra és n-re a következő értékek adódnak:

$$\left.\begin{aligned} (3) \qquad x_k &= \frac{5^{N-k} - 1}{4} - 3 \cdot \frac{5^k - 1}{4} - 1 \\ (4) \qquad y_k &= \frac{5^{N-k} - 1}{4} - 3 \cdot \frac{5^k - 1}{4} + 1 \end{aligned}\right\} \text{minden } 0 \leqq k \leqq N\text{-re,}$$

valamint

$$n = 3 \cdot \frac{5^N - 1}{4} + 1. \tag{5}$$

Mivel $5^s - 1$ osztható $5 - 1 = 4$-gyel, ezek egészek. Így n-nek az (5) szerinti értéket adva a (3) alatti x_k értékekre $x^2 + x + n$ értéke négyzetszám lesz. Ezek az x_k -k mind különbözők, ugyanis ha $x_k = x_l$, akkor y_k, $y_l > 0$ miatt (1) szerint $y_k = y_l$ is igaz, ahonnan $3 \cdot 5^k = 3 \cdot 5^l$, azaz $k = l$. Ezzel a feladat megoldását befejeztük.

Megjegyzések. 1. A 3-as szorzóra azért volt szükségünk, mivel enélkül n-re nem adódott volna egész érték.

2. Az (5)-beli n értéket választva, $x^2 + x + n$ pontosan $2N + 2$ különböző helyen lesz négyzetszám. Másrészt tetszőleges n-re azon x egészek száma, melyekre $x^2 + x + n$ négyzetszám, mindig páros és legalább 2.

3. Bár az $x^2 + x + n$ kifejezés értéke akárhány helyen négyzetszám lehet, mégsincs olyan n, amire végtelen sokszor az volna.