Az első forduló feladatai

I. kategória

Bizonyítsa be, hogy a

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{(a+d)^2+(b+c)^2}$$

egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $ac=bd$.

2. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{4\sin x+3}{4\cos x+3}=\frac{3\cos x+4}{3\sin x+4}.$$

3. Oldjuk meg a következő egyenletet a pozitív számok körében:

$$x+\frac{1}{x}=-y^2+6y-7.$$

4. Az ABC háromszög α szögének szögfelezője az A_1 pontban metszi a szemközti oldalt. Bizonyítsuk be, hogy $(AA_1)^2=AB\cdot AC-A_1B\cdot A_1C$.

5. Melyek azok az n pozitív egész számok, amelyekre $n-1990$ és $n+1990$ teljes négyzetek?

6. Egy rombusz oldalának hossza 6 egység, egyik szöge 30°. Rajzoljunk a rombusz minden oldala fölé kifelé négyzetet. Mekkora lesz a négyzetek középpontjai által meghatározott négyszög területe?

II. kategória

1. Hány olyan ötjegyű szám van, amelyben minden előforduló számjegy legalább kétszer szerepel?

2. Egy ABC hegyesszögű háromszög C csúcsa egyenlő távol van a magasságponttól és a háromszög köré írt kör középpontjától. Mekkora az ACB szög?

3. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

$$(2\sin x+1)(\operatorname{tg} x-1)\le 2;\quad (0\le x\le\pi).$$

4. Legyen δ az a szög, amelyet egy derékszögű háromszögben az egyik befogóhoz tartozó súlyvonal és az átfogó zárnak be. Bizonyítsuk be, hogy $\sin\delta\le\frac{1}{3}$.

5. Az (a_n) sorozatot a következő módon definiáljuk:

$$a_1=k\quad\text{(pozitív egész)},$$
$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2}, & \text{ha } a_n \text{ páros},\\ a_n+5, & \text{ha } a_n \text{ páratlan}.\end{cases}$$

Mely k pozitív egészekre igaz, hogy 1 előfordul az (a_n) sorozat tagjai között?

III. kategória

1. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sin^3\frac{\alpha}{3}+3\sin^3\frac{\alpha}{3^2}+\ldots+3^{n-1}\sin^3\frac{\alpha}{3^n}=\frac{1}{4}\left(3^n\sin\frac{\alpha}{3^n}-\sin\alpha\right).$$

2. Van-e az $x^2+xy+y^2=2$ egyenletnek racionális számokból álló megoldása?

3. Legyen δ az a szög, amelyet egy derékszögű háromszögben az egyik befogóhoz tartozó súlyvonal és az átfogó zárnak be. Bizonyítsuk be, hogy $\sin\delta\le 1/3$.

4. Antal 100 gyufásdobozt megszámoz 1-től 100-ig, és mindegyikbe tetszés szerinti számú gyufát tesz. Bea tetszőlegesen kiválaszt 15 dobozt, erre Antal megszámolja a bennük lévő gyufákat (úgy, hogy Bea ezt ne lássa), és megmondja, hogy a 15 dobozban együttesen páros vagy páratlan számú gyufa van. Bea ezt a kérdezési lépést akárhányszor megismételheti. Ki tudja-e Bea találni, hogy az 1-es számú dobozban páros vagy páratlan sok gyufa van, és ha igen, akkor mi az ehhez szükséges minimális lépésszám?

5. Legyen

$$a_0=1\quad\text{és}\quad a_n=\frac{\sqrt{1+a_{n-1}^2}-1}{a_{n-1}};\ (n=1,2,\ldots).$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$a_n>\frac{\pi}{2^{n+2}}.$$

A második (döntő) forduló feladatai

I. kategória

(Szakközépiskolák tanulói számára)

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} xy+xz &= 8-x^2; \\ xy+yz &= 12-y^2; \\ yz+zx &= -4-z^2. \end{aligned}$$

2. Jelölje d az ABC hegyesszögű háromszög A csúcsán átmenő egyenest. Legyen a B, illetve a C csúcs vetülete a d egyenesen B', illetve C'. A d egyenes mely helyzetében lesz a $BB'+CC'$ összeg maximális?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c oldalú háromszög kerülete 2 egység, akkor

$$a^2+b^2+c^2+2abc<2.$$

II. kategória

(A gimnáziumok III., IV. osztályos tanulói számára,
kivéve a speciális matematika tanterv szerint tanulókat)

1. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egész számhoz található olyan k pozitív egész, hogy az

$$S(n,k)=n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+k-1)$$

összeg négyzetszám.

2. Adott a síkon a T területű $A_1A_2\ldots A_n$ sokszög, a P pont és az α szög, melyre $0<\alpha\le 180°$. Jelölje a P pontnak az A_i körüli pozitív α szögű elforgatottját P_i. Mekkora a $P_1P_2\ldots P_n$ sokszög területe?

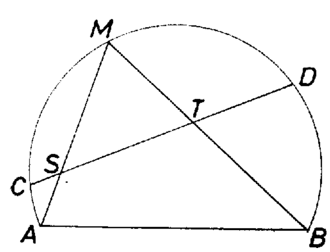
3. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan pozitív egész m kitevő, melyre $2^{1990}|1989^m-1$, (azaz 1989^m-1 osztható 2^{1990}-nel). Adjuk meg a legkisebb ilyen pozitív egész kitevőt.

III. kategória

(A gimnáziumok speciális matematika tanterv szerint tanuló diákjai számára)

1. Bergengóciában minden ember (egymásra való tekintet nélkül) p valószínűséggel $(0<p<1)$ hazudik, csak két kivétel van: az Elnök és a Rádióriporter, akik történetesen megbízhatóak. Az Elnök elhatározza, hogy ismét indul a választásokon, és ezt közli az első emberrel, aki továbbadja a hírt a következő embernek, …, végül az n-edik ember elmondja a hírt a Rádióriporternek. (Az n ember között nem szerepel az Elnök, sem a Rádióriporter.) $n=19$ vagy $n=20$ esetén valószínűbb, hogy a Rádióriporter a valódi döntést közvetíti?

2. Az AB húrhoz az ábra szerint egy körívet rajzolunk.



A körív két rögzített pontja C és D. Az M pont a körív CD ívén mozog. Az MA és MB szakaszoknak a CD-vel való metszéspontjai S és T. Adj szerkesztési eljárást annak az M pontnak a meghatározására, amely esetében az ST szakasz a lehető leghosszabb.

3. Négyzetország úthálózata 100 „vízszintes” és 100 „függőleges” egyenesből álló négyzetrács. A 10 000 rácspontot, amelyek az ország városai, valahogyan megszámozzuk 1-től 10 000-ig. A rács egy kis négyzetének oldalhossza egy szupermérföld. Valaki 10 000 nap alatt beautózza az országot a következőképpen. Az első napon elindul az 1-es városból és a legrövidebb („vízszintes” és „függőleges”) úton eljut a 2-esbe. A második napon ugyanúgy elautózik a 2-esből a hármasba stb. Végül a 10 000-ik napon visszatér a 10 000-esből az 1-esbe. Maximálisan hány szupermérföldet tehetett meg, ha a városok minden lehetséges megszámozását figyelembe vesszük?