**1.** (2)-ben $\gamma=\sqrt{2}$-vel $\alpha=\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$ $(<3)$ is megfelelő, ez (3)-hoz hasonlóan igazolható.

Felvetődik a kérdés, hogy (2)-ben $\alpha$ meddig csökkenthető. Könnyen látható, hogy ha valamilyen $\alpha$-hoz létezik a (2)-t kielégítő $\gamma$, akkor olyan $\gamma$ is létezik, amely a $[0;1]$ intervallumba esik ($\gamma$ ugyanis pontosan akkor megfelelő $\alpha$-hoz, ha $\{\gamma\}$ is az).

Az is látszik, hogy a rögzített $q$ $(>0)$ nevező esetén (2)-nek elegendő teljesülnie arra a $\dfrac{p}{q}$ törtre, amelyik a lehető legjobban megközelíti a $\gamma$-t.

Feltehetjük, hogy $0\le\gamma<1$, azaz $\dfrac{0}{q}\le\gamma<\dfrac{q}{q}$, vagyis $\dfrac{p}{q}$-ról feltehető, hogy a $[0;1]$ intervallumba esik.

Ezek szerint pontosan azokhoz az $\alpha$-khoz létezik „jó" $\gamma$, amelyekre a

$$\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{\alpha q^2};\ \frac{p}{q}+\frac{1}{\alpha}q^2\right)$$

alakú nyílt intervallumok $0\le p\le q$, $0<q$, $p$ és $q$ egészek) nem fedik be a $[0;1)$-et. (Természetesen itt a $[0;1)$ intervallum helyett $[0;1]$-et is írhatunk, mert az $\left(1-\dfrac{1}{\alpha};\ 1+\dfrac{1}{\alpha}\right)$ fedőintervallum tartalmazza az 1-et.)

A kérdés tehát az, hogy milyen kicsi lehet az $\alpha$, ha

(5a)
$$[0;1]\not\subset\bigcup_{\substack{p,q\in\mathbf{N}\\0\le p\le q\ne0}}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{\alpha q^2};\ \frac{p}{q}+\frac{1}{\alpha q^2}\right),$$

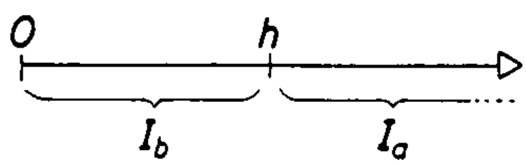
illetve kontraponálva, milyen nagy lehet az $\alpha$, ha

(5b)
$$[0;1]\subset\bigcup_{\substack{p,q\in\mathbf{N}\\0\le p\le q\ne0}}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{\alpha q^2};\ \frac{p}{q}+\frac{1}{\alpha q^2}\right).$$

Az (5a)-t, ill. az (5b)-t kielégítő (pozitív) $\alpha$-k egy-egy $I_a$, ill. $I_b$ intervallumot alkotnak úgy, hogy $I_a\cap I_b=0$, $\quad I_a\cup I_b=(0,+\infty)$ és

$$\sup I_b=\inf I_a=h.$$

Nyilván $(0;h)\subset I_b$, $(h;+\infty)\subset I_a$.




Egyszerűen adódik, hogy $2,5\le h$, azaz $2,5\in I_b$. Ehhez azt kell csak megmutatnunk, hogy $\alpha=2,5$ esetén (5b) teljesül, amit pedig igazol a

$$\begin{gathered}
[0;1]=[0;0,4)\cup\{0,4\}\cup(0,4;0,6)\cup\{0,6\}\cup(0,6;1]\subset\\
\subset\left(-\frac{1}{2,5};\ \frac{1}{2,5}\right)\cup\left(\frac{4}{10}-\frac{1}{2,5\cdot10^2};\ \frac{4}{10}+\frac{1}{2,5\cdot10^2}\right)\cup\\
\cup\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2,5\cdot2^2};\frac{1}{2}+\frac{1}{2,5\cdot2^2}\right)\cup\left(\frac{6}{10}-\frac{1}{2,5\cdot10^2};\frac{6}{10}+\frac{1}{2,5\cdot10^2}\right)\cup\\
\cup\left(1-\frac{1}{2,5};\ 1+\frac{1}{2,5}\right)\subset\bigcup_{\substack{p,q\in\mathbf{N}\\0\le p\le q\ne0}}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{2,5q^2};\ \frac{p}{q}+\frac{1}{2,5q^2}\right)
\end{gathered}$$

reláció.
Ezek szerint (2)-ben $\alpha<2,5$ már nem lehetséges

Most példát adok $\alpha=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\approx2,618$-ra. Legyen $\gamma=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$; azt fogjuk belátni, hogy

(6)
$$\left|\frac{\sqrt{5}-1}{2}-\frac{p}{q}\right|\ge\frac{1}{aq^2},$$

azaz

$$\left|\gamma - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{aq^2}.$$

Mivel $0 < \gamma < 1$, ezért az előzőek alapján (6)-ban feltehetjük, hogy $0 \leq \dfrac{p}{q} \leq 1$.

Jelölje $\overline{\gamma}$ a $\gamma$ algebrai konjugáltját: $\overline{\gamma} = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$. Ekkor $\gamma$ és $\overline{\gamma}$ az

$$x^2 + x - 1 = 0$$

egyenlet gyökei, és ezért tetszőleges $x$ számra

$$x^2 + x - 1 = (x - \gamma) \cdot (x - \overline{\gamma}).$$

Emiatt

$$\left|\frac{p}{q} - \gamma\right| \cdot \left|\frac{p}{q} - \overline{\gamma}\right| = \left|\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \left(\frac{p}{q}\right) - 1\right| = \frac{|p^2 + pq - q^2|}{q^2}.$$

A bal oldalon $0 \leq \dfrac{p}{q} \leq 1$ alapján

$$(0 <) \left|\frac{p}{q} - \overline{\gamma}\right| = \left|\frac{p}{q} + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right| = \frac{p}{q} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \leq 1 + \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \alpha,$$

a jobb oldalon pedig $|p^2 + pq - q^2| \geq 1$, hiszen $|p^2 + pq - q^2| = 0$ esetén a bal oldal egyik tényezője eltűnne, ami lehetetlen, mert $\gamma$ és $\overline{\gamma}$ irracionálisak. Így

$$\alpha \cdot \left|\frac{p}{q} - \gamma\right| \geq \frac{1}{q^2},$$

azaz

$$\left|\gamma - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{\alpha q^2},$$

amit bizonyítani akartunk.

Levezetésünkből az is kiderül, hogy (6)-ban pontosan akkor érvényes az egyenlőség, ha $p = 1$ és $q = 1$.

A (2)-t kielégítő $\alpha$-k alsó határa – $h$ – tehát a $[2,5; \dfrac{\sqrt{5}+3}{2}]$ intervallumba esik.

**2.** Előző megjegyzésünk szerint tudunk olyan $(x_k)$ sorozatot készíteni, amelyre a $\beta = \dfrac{\sqrt{5}+3}{4} \approx 1,309$ korláttal

$$|x_k| < \beta, \qquad \text{és} \qquad |x_i - x_j| \cdot |i - j| \geq 1 \tag{7}$$

teljesül. Itt is jó kérdés az, hogy milyen kicsi lehet a $\beta$.

Megmutatjuk, hogy $1 < \beta$; azaz $\beta \leq 1$ már nem lehetséges.

Legyen $(x_k)$ egy, a (7)-et kielégítő sorozat, és tegyük fel, hogy az $i_0, i_1, \ldots, i_n \in \mathbf{N}$ indexekre

$$(-\beta <) \;\; x_{i0} < x_{i1} < \ldots < x_{in} \;\; (< \beta).$$

Ekkor (7) szerint

$$2\beta > x_{in} - x_{i0} = \sum_{s=1}^{n}(x_{i_s} - x_{i_{s-1}}) \geq \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{|i_s - i_{s-1}|},$$

tehát

$$\frac{1}{|i_n - i_{n-1}|} + \frac{1}{|i_{n-1} - i_{n-2}|} + \ldots + \frac{1}{|i_1 - i_0|} < 2\beta. \tag{8}$$

Ha most $x_0, x_1, x_2, x_3$ és $x_4$ lehetséges nagyságbeli sorrendjeit vizsgáljuk, akkor – nem túlságosan nehéz ellenőrizni –

a) vagy van három olyan $0 \leq i_0,\ i_1,\ i_2 \leq 4$ index, hogy $x_{i_0} < x_{i_1} < x_{i_2}$, és $|i_1 - i_0| = 1,\ |i_2 - i_1| = 1$, tehát (8) alapján $2 = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1} < 2\beta$, vagy pedig

b) van 4 olyan $0 \leq i_0,\ i_1,\ i_2,\ i_3 \leq 4$ index, hogy $x_{i_0} < x_{i_1} < x_{i_2} < x_{i_3}$, és $|i_1 - i_0| = 2,\ \ |i_2 - i_1| = 1,\ \ |i_3 - i_2| = 2$, vagyis (8) alapján $2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} < 2\beta$.

Mindenképpen teljesül tehát a $2 < 2\beta,\ 1 < \beta$ egyenlőtlenség.

Ezek szerint a (7)-ben lehetséges $\beta$-k alsó határa az $\left[1;\ \frac{\sqrt{5}+3}{4}\right]$ intervallumban van valahol.

**3.** Láttuk, hogy $a \geq 1$ esetén létezik olyan korlátos $(x_k)$ sorozat ($|x_k| < \beta$), amelyre

$$|x_i - x_j| \cdot |i-j|^a \geq 1 \tag{9}$$

teljesül minden $i \neq j$ természetes számpár esetén. Megmutatjuk, hogy $a < 1$ esetén ilyen sorozat *nem létezik.*

Tegyük fel ugyanis, hogy állításunkkal ellentétben az $(x_k)$ sorozatra $|x_k| < \beta$ és (9) teljesül. A sorozat korlátos volta miatt vannak egymáshoz tetszőlegesen közel lévő elemek, tehát van olyan $i \neq j$ természetes számpár, amelyre $|x_i - x_j| < 1$ teljesül, és ekkor (9)-ből $|i-j|^a > 1$, vagyis $a \leq 0$ semmiképpen nem lehetséges. A továbbiakban legyen tehát $0 < a < 1$. Tekintsük az $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ elemek nagyságbeli sorrendjét:

$$x_{i_0} < x_{i_1} < \ldots < x_{i_n},$$

ahol $(i_0,\ i_1,\ \ldots, i_n)$ a $(0,\ 1,\ \ldots, n)$ elemek egy permutációja. Ekkor (8)-hoz hasonlóan (9)-ből

$$\sum_{s=1}^{n} |i_s - i_{s-1}|^{-a} < 2\beta. \tag{10}$$

Mivel $0 \leq i_s, i_{s-1} \leq n$, ezért $1 \leq |i_s - i_{s-1}| \leq n \quad (s = 1, 2, \ldots, n)$, vagyis

$$|i_s - i_{s-1}|^{-a} \geq n^{-a},$$

hiszen $0 < a$ miatt az $x \mapsto x^{-a}$ függvény szigorúan csökkenő. Ezt (10)-zel egybevetve

$$2\beta > \sum_{s=1}^{n} |i_s - i_{s-1}|^{-a} \geq \sum_{s=1}^{n} n^{-a} = n \cdot n^{-a} = n^{1-a}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy tetszőleges $n$ természetes számra

$$2\beta > n^{1-a},$$

ami ellentmondás, mert $0 < 1 - a$ miatt a jobb oldal minden határon túl nő. Ezzel állításunkat beláttuk.

Eredményeinket a következőképpen foglalhatjuk össze.

a) Ha $a \geq 1$, akkor létezik olyan $(x_k)$ sorozat, amelyre valamilyen $0 < \beta$ korláttal $|x_k| < \beta$ $(k = 0, 1, \ldots)$, továbbá $i \neq j$ $(i, j \in N)$ esetén $|x_i - x_j| \cdot |i-j|^a \geq 1$ teljesül

b) Ha $a < 1$, akkor ilyen sorozat nem létezik.

c) Az $a = 1$-re megadott sorozat minden $a \geq 1$-re megfelelő, $a = 1$-re meg tudunk adni olyan sorozatot, amelynek korlátja $\beta = \frac{\sqrt{5}+3}{4}$ $(\approx 1{,}309)$.

Fent közölt módszerünkkel $\beta < \frac{5}{4}$ $(= 1{,}25)$ már nem érhető el.

Nincs olyan sorozat, amelynek korlátja $\beta \leq 1$ lenne.

Kérdés, hogy hol a határ az 1 és a $\frac{\sqrt{5}+3}{4}$ között.