Legyen egy adott $n \geq 2$ egész szám esetén k az a természetes szám, amelyre

$$(k-1)^2 < n \leq k^2 \tag{1}$$

teljesül, vagyis k^2 legyen a legkisebb, n-nél nem kisebb négyzetszám. Megmutatjuk, hogy $f(n) = k$. A bizonyítás $f(n)$ definíciójának megfelelően két lépésből áll.

Először azt mutatjuk meg, hogy k választható m-nek, azaz $k \leq f(n)$. Legyen $e_1, e_2, \ldots, e_n$ tetszőleges n egyenes a síkon. Ha van köztük k párhuzamos, vegyük ki azokat. Ha nincs, lépésről lépésre vegyünk ki közülük mindig egyet úgy, hogy az új egyenes egyetlen korábban kiválasztott egyenessel se legyen párhuzamos. Így legalább k egyenest ki tudunk venni, hiszen feltevésünk szerint mindegyik kiválasztott egyenessel legfeljebb $k-2$ másik lehet párhuzamos. Emiatt ha tetszőleges $k-1$ egyeneshez hozzávesszük a velük párhuzamosakat, azokkal együtt is csak $(k-1)^2$ egyenest kapunk, és (1) szerint nekünk ennél több egyenesünk van.

Másodszor azt mutatjuk meg, hogy egyetlen k-nál nagyobb m számnak sem lehet meg a mondott tulajdonsága. Legyen $e_1, e_2, \ldots, e_k$ tetszőleges k egyenes a síkon, amelyek között nincs két párhuzamos. (Például egy $2k$ oldalú szabályos sokszög k egymás utáni oldala.) Húzzunk mindegyikkel párhuzamosan $k-1$ másik egyenest. Így (1) szerint legalább n egyenest kapunk, és ezek közül akárhogy választunk ki k-nál többet, köztük legalább kettő párhuzamos, hiszen különben az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ egyenesekkel párhuzamosak közül rendre csak egyet-egyet választhatunk, és ez legfeljebb k egyenes.

Károlyi Gyula (Budapest, Ságvári E. Gyak. Isk. 8. o. t.)