I. rész

1. A válasz: (B).
I. $x^x + x^x = 2x^x$.
II. $x^{2x} = (x^x)^2 \neq 2x^x$.
III. $(2x)^x = 2^x x^x \neq 2x^x$.
IV. $(2x)^{2x} = 2^{2x} \cdot x^{2x} \neq 2x^x$.

2. A válasz: (D).

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{2005} \cdot \frac{5^{2006} + 5^{4012}}{3^{2006} + 15^{2006}} = \frac{3^{2005} \cdot 5^{2006}(1 + 5^{2006})}{5^{2005} \cdot 3^{2006}(1 + 5^{2006})} = \frac{5}{3}.$$

3. Anna 4 napos, Béla 10 napos ciklusban dolgozik, így 4 és 10 legkisebb közös többszörösét kell kiszámolni, tehát 20 naposak az egyes ciklusok. Egy cikluson belül 2 szabadnap közös. A 120 nap alatt 6 ilyen ciklus van, így 12-szer lesz közös a szabadnapjuk.

4. $\overrightarrow{AD} = (8; 3)$, $\overrightarrow{BC} = (12; 4{,}5)$, így $\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$, ezért a négyszög trapéz és nem paralelogramma.

5. A válasz (A).

$$\frac{32\,000 \cdot 1{,}05 + 8\,000 \cdot 1{,}1}{40\,000} = \frac{42{,}4}{40} = 1{,}06.$$

Az emelkedés 6%-os volt.

6. *a*) $A = \{0; 1; 2\}$, $B = \{-2; 2\}$, $C = \{2; 3; 5\}$.
b) $A \cap B \cap C = \{2\}$.
c) B nem részhalmaza az A-nak, mert $-2 \notin A$.

7. *a*) $x^2 - 1 \geq 0$, $x^2 \geq 1$, tehát $x \geq 1$ vagy $x \leq -1$.
b) $1 - x > 0$, $x < 1$.

8. $4^x - 2^{x+1} = 3$, amiből ekvivalens átalakítással

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 3 = 0.$$

$2^x = a$ helyettesítéssel az $a^2 - 2a - 3 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei: $a_1 = 3$, $a_2 = -1$.

Mivel $2^x > 0$, azért csak az $a_1 = 2^x = 3$ esetén kapunk megoldást:

$$x = \frac{\lg 3}{\lg 2} = \log_2 3.$$

A kapott gyök kielégíti az eredeti egyenletet.

9. Az egy napi gyógyszer ára: $\frac{1470 \text{ Ft}}{14} = 105$ Ft.

Az egy napi gyógyszerfogyasztás: a zöld kapszulából 3 darab, fehér kapszulából két darab. Ha egy zöld kapszula ára x Ft, akkor egy fehér kapszula ára $(x - 10)$ Ft. A napi fogyasztás ára:

$$3x + 2(x - 10) = 105,$$

amiből $x = 25$ és $x - 10 = 15$.

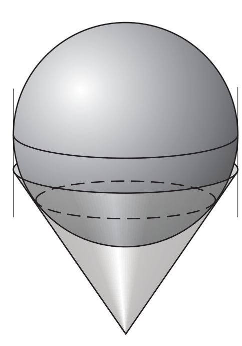
Így egy darab zöld kapszula ára 25 Ft, egy darab fehér kapszula ára 15 Ft.

10. A válasz: (B).

Az *ábráról* leolvashatjuk a grafikonnak a koordináta-tengelyekkel való metszéspontjait.

$f(0) = 2$, ezért $d = 2$; $f(-1) = 0$, ezért $0 = -a + b - c + 2$; $f(1) = 0$, ezért $0 = a + b + c + 2$. Így $2b + 4 = 0$, tehát $b = -2$.

11. Legyen a kúp és a gömb közös sugarának nagysága: r.



A gömb térfogata: $V_{\text{gömb}} = \dfrac{4r^3\pi}{3}$, a kúp térfogata:

$$V_{\text{kúp}} = \frac{r^2\pi \cdot m}{3}.$$

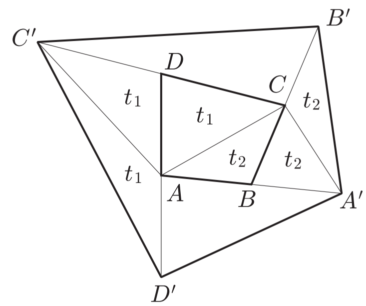
A feltételek miatt:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4r^3\pi}{3} = \frac{r^2\pi \cdot m}{3},$$

amiből $m = 3r$.

Így a tölcsérkúp magassága és a fagylaltgömb sugara hosszának az aránya 3 : 1.

12. A válasz: (B).
Ábrát készítünk.



Az $ABCD$ négyszöget az AC, illetve a BD átlója két-két háromszögre bontja. Nyilvánvaló, hogy ezek területének összege megegyezik az $ABCD$ négyszög területével. Felhasználjuk, hogy egy háromszöget a súlyvonala két egyenlő területű háromszögre bont:

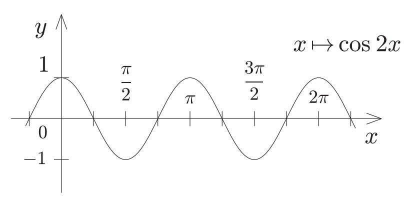
$$T_{A'B'C'D'} = T_{ABCD} + T_{DC'D'} + T_{B'BA'} +$$

$$+ T_{C'CB'} + T_{D'A'A} = 5T_{ABCD}.$$

A keresett arány: 5 : 1.

II./A rész

13. *a*) Az $x \mapsto \cos 2x$ függvény grafikonját az $x \mapsto \cos x$ függvény transzformációjának a segítségével készítjük el.

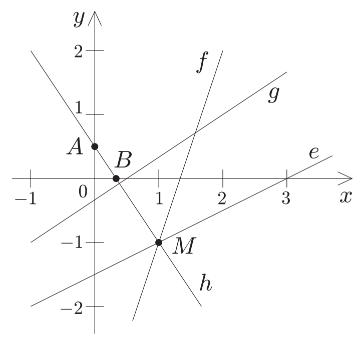


Helyi maximuma van a függvénynek az $x = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$ helyeken és értéke 1.
Helyi minimuma van a függvénynek az $x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$ helyeken és értéke -1.
b) Felhasználjuk, hogy $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.
$\cos^2 x - 8\sin^4 x = \sin^2 x$, amiből $8\sin^4 x + 2\sin^2 x - 1 = 0$,

$$\sin^2 x = \frac{-2 \pm 6}{16}, \qquad \sin^2 x_1 = \frac{1}{4}, \qquad \sin^2 x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Ez utóbbi nem megfelelő, mivel $\sin^2 x \geq 0$, tehát $\sin x = \dfrac{1}{2}$ vagy $\sin x = -\dfrac{1}{2}$, amiből az egyenlet megoldásai: $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Mindegyik gyök kielégíti az eredeti egyenletet.

14. *a*) (I) $x - 2y = 3$, (II) $3x - y = 4$ egyenletrendszert megoldjuk, pl. a behelyettesítő módszerrel. (I)-ből $x = 2y + 3$, amit (II)-be visszahelyettesítünk. Így megkapjuk, hogy $y = -1$, $x = 1$, tehát az M metszéspont koordinátái: $(1; -1)$.
b) A h egyenes illeszkedik az $M(1; -1)$ pontra.
A g egyenes normálvektora: $\mathbf{n}_g(2; -3)$.
A h egyenes normálvektora pl.: $\mathbf{n}_h(3; 2)$.



A keresett h egyenes egyenlete:

$$3x + 2y = 3 - 2 = 1,$$

vagy más formában

$$y = -\frac{3}{2} \cdot x + \frac{1}{2}.$$

c) A h egyenes az $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ pontban metszi az y tengelyt, a $B\left(\frac{1}{3}; 0\right)$ pontban metszi az x tengelyt.

15. Legyen $d(BC) = 2a$. Jelöljük a BC oldal felezőpontját F-fel és legyen $BFA\sphericalangle = \delta$. Ekkor

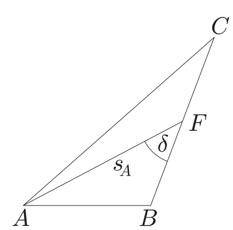
$$AFC\sphericalangle = 180^\circ - \delta \quad \text{és} \quad \cos(180^\circ - \delta) = -\cos\delta.$$

Írjuk fel a koszinusz tételt az ABF és az AFC háromszögekre:

$$a^2 + 4a^2 - 4a^2 \cos\delta = 1$$

$$a^2 + 4a^2 + 4a^2 \cos\delta = 4,$$

amiből $10a^2 = 5$, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Így $d(BC) = 2a = \sqrt{2}$ (cm).



Közelítő értékkel (1 tizedes jegy pontosságig, az adatok pontosságának megfelelően) $d(BC) \approx 1{,}4$ cm.

II./B rész

16. Ha a 2-es számot tartalmazó cédulát háromszor húztuk ki és a számok összege 6, akkor a feljegyzésünk: $(2; 2; 2)$. Tehát a kedvező esetek száma: 1.

Az összes eset, amikor a számjegyek összege 6, a következő:

$$(1;2;3); \quad (1;3;2); \quad (2;3;1); \quad (2;1;3); \quad (3;1;2); \quad (3;2;1); \quad (2;2;2).$$

Így összesen 7 eset van. A keresett valószínűség: $\frac{1}{7}$.

17. *a*) a_4, a_7, a_{10} is egy számtani sorozat három szomszédos tagja. Ha $a_7 = x$, akkor

$$(x - 3d) + x + (x + 3d) = 17,$$

amiből $a_7 = \frac{17}{3}$.

b) $a_4, a_5, \ldots, a_9, \ldots, a_{13}, a_{14}$ tagok közül a mediánt (a középsőt), vagyis a_9-et y-nal jelölve és felhasználva a számtani sorozat definícióját kapjuk, hogy

$$(y - 5d) + (y - 4d) + \ldots + (y - d) + y + (y + d) + \ldots + (y + 4d) + (y + 5d) = 77,$$

innen $y = a_9 = 7$.

c) Mivel $a_9 - a_7 = 2d$, azért $d = \dfrac{2}{3}$.

d) $a_7 = a_1 + 6d$, amiből $a_1 = \dfrac{5}{3}$.

e) $a_k = a_1 + (k-1)d$, $13 = \dfrac{5}{3} + (k-1) \cdot \dfrac{2}{3}$, amiből $k = 18$, tehát $a_{18} = 13$.

18. A fácánok száma: 2001-ben 39, 2002-ben 60, 2003-ban x, 2004-ben 123.

a) A feltétel szerint:

$x - 39 = 60 \cdot k$, ahol k az arányossági tényező és $123 - 60 = k \cdot x$.

Innen

$$k = \frac{63}{x}, \quad x - 39 = 60 \cdot \frac{63}{x}, \quad x^2 - 39x - 3780 = 0, \quad x_1 = 84, \quad x_2 = -45 < 0,$$

így x_2 nem felel meg a feladat feltételeinek.

A fácánok létszáma 2003-ban 84 volt.

b) Az oszlopdiagram: