

I. rész

1. 1 kg kenyér eredeti ára 125, megemelt ára 150 Ft. 500 Ft-ból így az emelés után $3\frac{1}{3}$ kg kenyérré telik.

2. A gyök és a nevező miatt $x^2 - 4 > 0$, azaz $x > 2$ vagy $x < -2$. A megoldás halmazjelölésekkel: $]-\infty; -2[\cup]2; \infty[$.

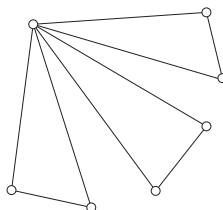
3. A számok kihúzására az összes lehetőségek száma, a húzási sorrendet figyelembe véve: $6 \cdot 5 = 30$. A megfelelő számpárok: 1 és 2; 1 és 8; 2 és 4; 3 és 6; 5 és 4. Mivel az összes esetek számának meghatározásánál figyelembe vettük a sorrendet, ezért a jó esetek száma: $5 \cdot 2 = 10$, tehát a keresett valószínűség $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

4. A keresett hossz: $\sqrt{(7-3)^2 + (-3+6)^2} = 5$.

5. $x \mapsto 4 - x$.

6. Átlag = 5, Medián = 3.

7.



8. a) 2004 és 2005 között körülbelül 12 000-rel nőtt a lakosok száma.

b) 2003 és 2004 között csökkent a lakosok száma.

9. Ha az eredeti állítás igaz, akkor nem lehet olyan tarka szarka, aminek a farka nem tarka. Ha pedig nincs olyan tarka szarka, aminek a farka nem tarka, akkor minden tarka szarka farka tarka kell legyen. Tehát a C a helyes válasz.

10.

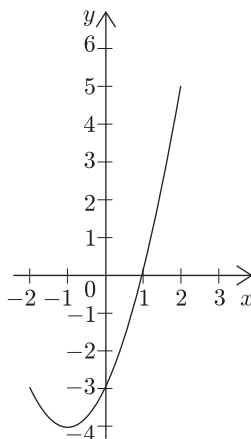
$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} \cdot \frac{a + b}{5a - 5b} = \frac{(a + b)(a - b)}{a + b} \cdot \frac{a + b}{5(a - b)} = \frac{a + b}{5}.$$

A kifejezés helyettesítési értéke 41.

11. A háromszög területe befogói szorzatának fele, azaz 30 cm^2 . Az átfogó a Pitagorasztételből számítható, hossza 13 cm. Az átfogóhoz tartozó magasság

$$m = \frac{2T}{13} = \frac{60}{13} \text{ cm}.$$

12.



II./A rész

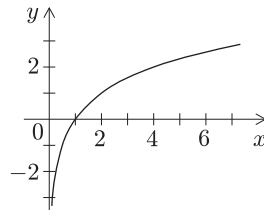
13. a) Havi 1000 példány a Mismásolóval $5000 + 1000 \cdot 8 = 13\,000$ Ft, a Másmásolóval $9500 + 1000 \cdot 5 = 14\,500$ Ft, tehát a Mismásolóval $\frac{13\,000}{14\,500} \approx 0,897$ részébe kerül a másolás, azaz körülbelül 10,3%-kal olcsóbb.

b) A Másmásolóval 4500 Ft az alapdíj-különbözet, ami 1500 példány másolása esetén térül meg. 1500 példány felett a Másmásoló, 1500 példány alatt a Mismásoló kedvezőbb.

c) 20 000 másolat ára $9500 + 20\,000 \cdot 5 = 109\,500$ Ft a Másmásolóval. Ha erre 20%-os hasznot teszünk, akkor 131 400 Ft a teljes költség, így egy példányra 6,57 Ft jut.

d) Kifizettünk a 20 000 példányért 109 500 Ft-ot, és szeretnénk 131 400 Ft bevételt elérni. Eddig beszedtünk 100 000 Ft-ot, az 5000 példánynak a fennmaradó 31 400 Ft-os bevételt kell produkálnia. Ehhez 6,28 Ft-ért kell adnunk egy másolatot.

14. a)

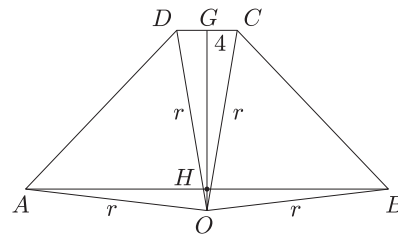
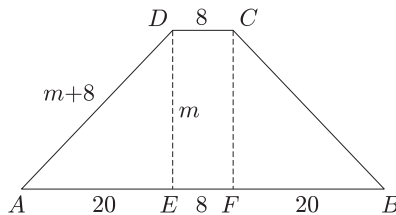


b) Vezessünk be új változót! $a = 2^x$. Ezzel az egyenlet a

$$8a^2 - 33a + 4 = 0$$

alakot ölti, ennek gyökei 4 és $\frac{1}{8}$. A $2^x = 4$ és $2^x = \frac{1}{8}$ egyenletek gyökei $x = 2$ és -3 .

15. a) Jelölje m a trapéz magasságát, ekkor a DAE derékszögű háromszögből $(m+8)^2 = m^2 + 400$, $m = 21$. A trapéz területe 588.



b) Jelölje r a trapéz köré írt kör sugarát, ekkor a CGO , illetve BHO derékszögű háromszögekből kapjuk: $\overline{OH} = x$ jelöléssel $r^2 = (x+21)^2 + 4^2$, $r^2 = x^2 + 24^2$. Innen $x = \frac{119}{42}$, $r = \frac{145}{6}$.

II./B rész

16. a) $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, illetve $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, ahol k tetszőleges egész szám. Innen $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, illetve $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$.

b) Az egyenlet $x > -1$, $x \neq 4$ esetén értelmezett. Ekvivalens átalakításokkal

$$2 \log_2(x+1) + \log_2(x-4)^2 = 2 \log_2 6,$$

innen $\log_2(x+1)^2(x-4)^2 = \log_2 36$. A $\log_2 x$ függvény kölcsönösen egyértelmű, így $[(x+1)(x-4)]^2 = 36$. Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$(x+1)(x-4) = 6, \quad \text{vagy} \quad (x+1)(x-4) = -6.$$

Az első egyenletből $x_1 = 5$, $x_2 = -2$ (ez utóbbi a kikötés miatt nem megoldás). A második egyenletből $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, ez mindkettő megoldás.

Megjegyzés: Az eredeti egyenlet $\log_2(x+1) + \log_2|x-4| = \log_2 6$ alakban is írható.

17. a) A kötelek által meghatározott háromszögben a 80 m-es oldallal szemköztí szögére a koszinusz-tételt felírva:

$$40^2 + 60^2 - 2 \cdot 40 \cdot 60 \cdot \cos \alpha = 80^2,$$

innen $\cos \alpha = -0,25$, $\alpha \approx 104,47^\circ$. A háromszög (az olajfolt) területe

$$0,5 \cdot 40 \cdot 60 \cdot \sin 104,47^\circ \approx 1161,9 \text{ m}^2.$$

b) A kiválasztásra az összes esetek száma $\binom{20}{2} = 190$. A jó esetek azok, amikor egy sztrájkolót és egy nem sztrájkolót választ ki a kapitány, ezek száma $15 \cdot 5 = 75$. Tehát a keresett valószínűség $\frac{75}{190} = \frac{15}{38}$.

c) Az egyes nemzetiségekhez tartozó középponti szögek: svéd 45° , dán 90° , kínai 72° , német 153° .

18. Az első kutya egy körön belül és a körvonalon, a második két párhuzamos egyenesen és közöttük mozog. A legkisebb távolság köztük akkor léphet fel, amikor mindkettő a kör középpontjából a megadott egyenesre emelt merőleges egyenesen tartózkodnak, távolságuk a kör középpontjának és az egyenesnek a távolságánál 3 egységgel kisebb. A kör középpontjából az adott egyenesre állított merőleges egyenlete: $4x - 3y = 1$. A két egyenes metszéspontja az $(1; 1)$ pont. A $(4; 5)$ és $(1; 1)$ pontok távolsága 5 egység. Tehát a kutya közötti legkisebb távolság 2 egység.