I. rész

1. *Határozza meg az a és b pozitív egész számok lehetséges értékeit, ha $a < b$, továbbá teljesül, hogy ha x és y eleme az $[a; b]$ intervallumnak, akkor $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ is eleme $[a; b]$-nek!* (*12 pont*)

Megoldás. Nem lehet $a > 1$, mert akkor $a \geq 2$ miatt $x \geq 2$ és $y \geq 2$ lenne, és így $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ lenne, ami ellenkezik $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq a \geq 2$-vel. Tehát $a = 1$.

A b értéke csak 2 lehet, mert egyrészt $b > a$ miatt $b \geq 2$, másrészt $b > 2$ nem lehet. Ugyanis $b > 2$ esetén $x = 2{,}5$ és $y = 2{,}5$ az $[a; b]$ eleme, de

$$\frac{1}{2{,}5} + \frac{1}{2{,}5} = 0{,}8 < 1 = a$$

miatt $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ nem eleme $[a; b]$-nek.

Az $a = 1$, $b = 2$ jó, mert $1 \leq x \leq 2$ és $1 \leq y \leq 2$ esetén $1 \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq 2$.

Tehát a keresett számok: $a = 1$ és $b = 2$.

2. *a*) *Oldja meg a valós számok halmazán a*

$$\sqrt{1 + x\sqrt{x^2 - 16}} = x - 1$$

egyenletet! (*5 pont*)

b) Adja meg a fenti egyenlet alaphalmazát! (*7 pont*)

Megoldás. Ha van az egyenletet kielégítő x, akkor az egyenlet két oldalának négyzete is egyenlő:

$$1 + x\sqrt{x^2 - 16} = x^2 - 2x + 1, \qquad \text{azaz} \qquad x\sqrt{x^2 - 16} = x^2 - 2x.$$

Az eredeti egyenletnek $x = 0$ nem megoldása, tehát a megoldásra $\sqrt{x^2 - 16} = x - 2$ is, így $x^2 - 16 = x^2 - 4x + 4$ is teljesül, ezért a megoldás csak $x = 5$ lehet.

Behelyettesítés mutatja, hogy ez valóban megoldás is.

b) Az alaphalmaz azokból az x valós számokból áll, amelyekre egyrészt $x^2 - 16 \geq 0$, és így $|x| \geq 4$ is, másrészt $x\sqrt{x^2 - 16} \geq -1$ is teljesül. Ez utóbbi nemnegatív x-re mindig teljesül. Negatív x-re pedig pontosan akkor, ha $|x|\sqrt{x^2 - 16} \leq 1$, azaz ha $x^4 - 16x^2 - 1 \leq 0$.

$x^4 - 16x^2 - 1 \leq 0$ megoldásai a $8 - \sqrt{65} \leq x^2 \leq 8 + \sqrt{65}$ egyenlőtlenséget teljesítő x értékek, tehát azok, amelyekre $-\sqrt{8 + \sqrt{65}} \leq x \leq \sqrt{8 + \sqrt{65}}$ teljesül. Ezek közül a negatívok: $-\sqrt{8 + \sqrt{65}} \leq x < 0$.

Tehát a keresett alaphalmaz:

$$\left[-\sqrt{8 + \sqrt{65}}; -4\right] \cup [4; \infty).$$

3. *Egy autókereskedő ötfajta autót forgalmaz. Az egyes fajták darabját*

$$2{,}3 \qquad 2{,}8 \qquad 3 \qquad 3{,}1 \qquad 3{,}5$$

MFt-ért adja el, és nyeresége (az eladási ár és a beszerzési ár különbsége) fajtánként a fenti sorrendben az eladási ár

$$3 \qquad 2{,}5 \qquad 2{,}4 \qquad 2{,}1 \qquad 2$$

százaléka. Ez a két adatsor a további vizsgálatok során nem változik. Az egyes fajtákból (fenti sorrendben)

2003-ban	25	32	27	38	19	darabot,
2004-ben	27	31	29	32	33	darabot

adott el.

a) *Mennyi volt a nyeresége 2003-ban, és mennyi 2004-ben?* (*5 pont*)

b) *Ha 2005-ben csak egy autófajtát forgalmaz, akkor melyik autófajtát (mennyi annak az egységára) érdemes forgalmaznia, és abból legalább hányat kell eladnia, ha a lehető legkevesebb autó eladásával akarja elérni a 2004-es nyereségét?* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) A nyereség 2003-ban:

$$2{,}3\cdot 0{,}03\cdot 25+2{,}8\cdot 0{,}025\cdot 32+3\cdot 0{,}024\cdot 27+3{,}1\cdot 0{,}021\cdot 38+3{,}5\cdot 0{,}02\cdot 19=$$

$$=9{,}7128\ \text{(MFt)}.$$

A nyereség 2004-ben:

$$2{,}3\cdot 0{,}03\cdot 27+2{,}8\cdot 0{,}025\cdot 31+3\cdot 0{,}024\cdot 29+3{,}1\cdot 0{,}021\cdot 32+3{,}5\cdot 0{,}02\cdot 33=$$

$$=10{,}5142\ \text{(MFt)}.$$

b) A legnagyobb nyereség egy autó eladásánál annál az autófajtánál van, amelynél az eladási ár százalékértéke a legnagyobb. Ezek a százalékértékek rendre

$$2{,}3\cdot 0{,}03=0{,}069;\qquad 2{,}8\cdot 0{,}025=0{,}07;\qquad 3\cdot 0{,}024=0{,}072;$$

$$3{,}1\cdot 0{,}021=0{,}0651;\qquad 3{,}5\cdot 0{,}02=0{,}07,$$

így a legnagyobb százalékérték (a 0,072) a 3 MFt árú autófajtánál van.

Ebből az autófajtából legalább annyit kell eladnia, amennyivel a nyereség először nagyobb vagy egyenlő a 2004-es nyereségnél. Ez a szám:

$$\frac{10{,}5142}{0{,}072}=146{,}030\,55\ldots$$

miatt 147.

4. *Az r és az R sugarú körök kívülről érintik egymást, és $r<R$. Közös külső érintőik szöge α.*

a) *Mennyi $\dfrac{R}{r}$, ha $\alpha=60^\circ$?* (*5 pont*)

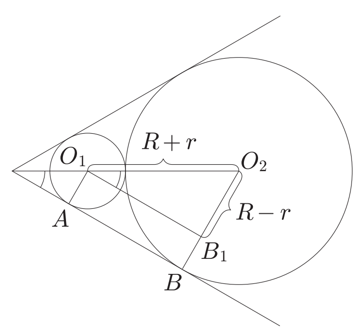
b) *Mennyi α, ha $\dfrac{R}{r}=\dfrac{5}{3}$?* (*5 pont*)

c) *Mennyi annak a négyszögnek a területe, amelynek két csúcsa a körök középpontja, további két csúcsa pedig az egyik közös külső érintőn levő két érintési pont, ha $R=5$ és $r=3$?* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) A *c*) részben említett négyszögben az egyik szárral párhuzamosan és a másik szár végpontján át húzott egyenes olyan $O_1B_1O_2$ derékszögű háromszöget jelöl ki, amelyből

$$\frac{R-r}{R+r}=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}.$$

Ebből $\dfrac{R}{r}=3$.



b) A fenti egyenletet kissé átrendezve:

$$\frac{\frac{R}{r}-1}{\frac{R}{r}+1}=\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Ebből $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{4}$, így a keresett érték: $\alpha\approx 29^\circ$.

c) A kérdéses négyszög olyan derékszögű trapéz, amelynek alapjai R és r, az ezekre merőleges szár a már említett derékszögű háromszögből Pitagorasz tételével számítható:

$$m=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=2\sqrt{Rr}.$$

A keresett terület az adott sugárértékekkel:

$$\frac{5+3}{2}\cdot 2\sqrt{5\cdot 3}=8\sqrt{15}\approx 30{,}98.$$

II. rész

5. *A H halmaz a 2005-nél nem nagyobb pozitív egész számok halmazának olyan részhalmaza, hogy tetszőleges két elemének összege nem osztható hárommal. Legfeljebb hány eleme van ennek a H halmaznak?* (*14 pont*)

Megoldás. Vizsgáljuk a 2005-nél nem nagyobb pozitív egész számokat a hárommal való osztási maradékaik szerint.

Az olyan számokból, amelyeknek az osztási maradéka 0, csak egy szerepelhet a H halmazban, mert két ilyen szám összege osztható hárommal.

Ha 1, vagy ha 2 az osztási maradék, akkor csak az egyik fajta szerepelhet H-ban, mert különböző fajták összege osztható hárommal. Egy fajtából viszont akármennyi lehet, és a 0 maradékot adó szám is ott lehet közöttük. A kérdés most már csak az, hogy melyik fajtából van több az adott halmazunkban.

2004 osztható hárommal, így 1-től 2004-ig ugyanannyi szám ad 1 maradékot, mint ahány 2 maradékot, és a számuk 668. Mivel 2005 maradéka 1, azért az 1 maradékot adókat és egy 0 maradékot adót választva a H halmazba, maximális elemszám érhető el, és ez a szám 670.

6. *Egy dobozban öt piros golyó van.*

a) Hány fehér golyót kell a dobozba tennünk, ha azt akarjuk, hogy ezután a dobozból a golyók közül egyet véletlenszerűen kihúzva (a golyók kihúzásának valószínűsége megegyezik) a kihúzott golyó 0,25 valószínűséggel piros legyen? (*6 pont*)

b) Legalább hány fehér és legalább hány fekete golyót kell a dobozba tennünk (mindegyikből legalább egyet teszünk), ha azt akarjuk, hogy ezután a dobozból a golyók közül egyet véletlenszerűen kihúzva, a kihúzott golyó 0,25 valószínűséggel ne fekete legyen? (*10 pont*)

Megoldás. *a*) Ha x darab fehér golyót teszünk a dobozba, akkor $\dfrac{5}{5+x}$ a valószínűsége annak, hogy a kihúzott golyó piros lesz. Az $\dfrac{5}{5+x}=0{,}25$ egyenlet megoldása $x=15$, tehát a keresett szám 15.

b) Ha x darab fehér és y darab fekete golyót teszünk a dobozba, akkor $\dfrac{5+x}{5+x+y}$ a valószínűsége annak, hogy a kihúzott golyó piros vagy fehér lesz, tehát nem lesz fekete. Az

$$\frac{5+x}{5+x+y}=0{,}25$$

egyenlet átrendezve (x és y nem negatívok, a nevező nem 0): $y=3x+15$.

Tehát a keresett számok: $x=1,\ \ y=18$.

7. *Oldja meg a valós számok halmazán az*

$$\log_x(x^2+x-4)<1$$

egyenlőtlenséget! (*16 pont*)

Megoldás. Nyilvánvaló, hogy a logaritmus alapja miatt csak a pozitív x értékek jöhetnek számításba. Teljesülni kell $x^2+x-4>0$-nak is, ami

$$x<\frac{1}{2}\big(-1-\sqrt{17}\big),\qquad \text{valamint}\qquad x>\frac{1}{2}\big(-1+\sqrt{17}\big)$$

esetén igaz. Ez és $x>0$ akkor teljesül, ha $x>\dfrac{1}{2}\big(-1+\sqrt{17}\big)$.

Ekkor az alapszám 1-nél nagyobb, és ilyen alapszám esetén a logaritmus pontosan akkor kisebb 1-nél, ha a logaritmálandó mennyiség kisebb az alapszámnál, tehát a mi esetünkben, ha $x^2+x-4<x$. Ez $-2<x<2$ esetén teljesül, tehát a feladat megoldása $\dfrac{1}{2}\big(\sqrt{17}-1\big)<x<2$.

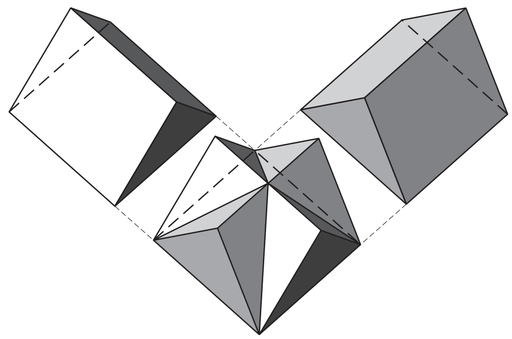
8. *Legyen A az a háromoldalú egyenes hasáb, amelynek alaplapja 2 oldalhosszúságú szabályos háromszög és oldalélének hossza is 2. Az egyik oldallapjának középpontján áthaladó, a lapra merőleges egyenes körül forgassuk el az A testet 90°-kal, és jelöljük A'-vel az elforgatott testet!*

Mennyi az $A\cup A'$ test

a) térfogata? (*8 pont*)

b) felszíne? (*8 pont*)

Megoldás. Könnyű belátni, hogy $A\cap A'$ olyan négyoldalú egyenes gúla, amelynek alapja a közös oldallap, magassága a hasáb alaplapjának magassága.



a) $A \cap A'$ térfogata:

$$2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2,31.$$

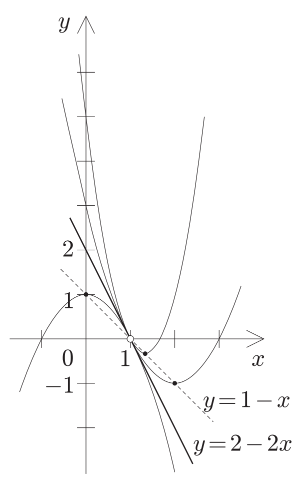
$A \cup A'$ térfogata:

$$2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 - \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \approx 4,62.$$

b) $A \cup A'$ felszínének meghatározásához elegendő azt észrevenni, hogy ez a felszín az A felszínénél a hasáb két párhuzamos lapjának területével nagyobb, mert egy oldallap közös, két-két oldallap megmaradó része pedig együtt adja ki A két oldallapját. Tehát a keresett felszín: $3 \cdot 4 + 4 \cdot \sqrt{3} \approx 18{,}93$.

9. *a*) *Írja fel azoknak a paraboláknak az egyenletét, amelyek grafikonja a $P(1;0)$ pontban érinti az $y = 2 - 2x$ egyenletű egyenes grafikonját, és tengelye az y tengellyel párhuzamos!* (*9 pont*)
b) *Hol helyezkednek el ezeknek a paraboláknak a csúcspontjai?* (*9 pont*)

Megoldás. *a*) A parabolák egyenletét $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ alakban keressük. Mivel a parabola illeszkedik a $P(1;0)$ pontra, $0 = a + b + c$, azaz $c = -a - b$.



Az adott egyenesnek és ennek a parabolának csak egy közös pontja lehet, ezért a

$$2 - 2x = ax^2 + bx - a - b$$

egyenletnek csak egy gyöke lehet.

A diszkriminánsa:

$$(b + 2)^2 + 4a(a + b + 2) = (b + 2 + 2a)^2 = 0,$$

így $b = -2a - 2$.

A parabolák egyenlete tehát

$$y = ax^2 - (2a + 2)x + a + 2,$$

ahol $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) A parabolák csúcspontját a szélsőérték helye és nagysága alapján határozzuk meg. Helye: $\dfrac{a+1}{a}$, nagysága:

$$a\left(\frac{a+1}{a}\right)^2 - (2a + 2)\frac{a+1}{a} + a + 2 = -\frac{1}{a}.$$

($a \neq 0$, ezt az elején kikötöttük.) A csúcspontok paraméteres egyenlete: $x = \dfrac{a+1}{a}$, $y = -\dfrac{1}{a}$. Ez éppen az $x + y = 1$ egyenletű egyenes, ahol az $x \neq 1$, $y \neq 0$, tehát a P pont kivételével.

A csúcspontok tehát ezen az egyenesen vannak, és nyilvánvaló (bár ezt nem kérdezte a feladat), hogy az egyenes pontjai P kivételével csúcspontok.