

## I. rész

1. Határozza meg azt a négy, egymás után következő páratlan számot, amelyek négyzeteinek összege 48-cal nagyobb, mint a közékük eső páros számok négyzeteinek összege!

2. Az egységnyi oldalú  $ABCD$  négyzet  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  és  $DA$  oldalán rendre vegye fel az  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  pontokat úgy, hogy  $AE = \frac{1}{2}$ ,  $BF = \frac{1}{3}$ ,  $CG = \frac{2}{3}$  és  $DH = \frac{1}{2}$  legyen. Számítsa ki az  $EFGH$  négyszög szögeit, kerületét, területét!

3. Az 1, 2, 3 számjegyekből hatjegyű számokat képezünk.

a) Hányféle különböző számot kaphatunk?

b) Hány olyan szám van, amely mindhárom számjegyet legalább egyszer tartalmazza?

c) Mi a valószínűsége, hogy a kapott szám páros?

d) Mi a valószínűsége, hogy a kapott szám 3-mal osztható?

4. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\log_{\sin x}(1 - \cos^2 x) = 2^{\sqrt{4-x^2}}.$$

## II. rész

5. Péter 1000 kötetes könyvtára magyar, angol és német nyelvű könyvekből áll. A könyvek  $p\%$ -a magyar nyelvű, az idegen nyelvű könyvek  $p\%$ -a angol nyelvű, német nyelvű könyve mindössze 10 db van. Határozza meg a magyar és az angol nyelvű könyvek számát!

6. Legyen

$$f(x) = \frac{1 - \frac{4x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{x^2-1}}.$$

a) Mi a fenti kifejezés értelmezési tartománya?

b) Hozza a kifejezést a lehető legegyszerűbb alakra!

c) Hány rácsponton halad át az  $f(x)$  függvény grafikonja?

7. Egy szobor két egymásra rakott gömbből áll, ahol a felső gömb sugara fele az alsó gömb sugarának, a szobor magassága 3 méter. A tél viszontagságai ellen védeni akarták a szobrot, ezért pályázatot írtak ki „védőruha” készítésére. Két pályamunka érkezett, az egyik négyzet alapú csonkakúp, a másik csonkakúp alakú védőruhát javasolt. Mindkettő palástja érinti a két gömböt és a fedőlapja a kisebbik gömböt (alaplappja egyiknek sincs). A csonkakúp alakú terv fajlagos költsége 12 000 Ft/m<sup>2</sup>, a csonkakúpálé 10 000 Ft/m<sup>2</sup>. Melyik pályamunka kivitelezése lenne olcsóbb?

8. Egy logisztikai központba 24 óras időtartamon belül véletlen időpontban két kamion érkezik. Az előbb érkezőből rögtön megkezdik a kirakodást, mely az egyiknek 1 órát, a másiknak 2 órát vesz igénybe. Ha a második kamion akkor érkezik, amikor a másikon még rakodnak, úgy várakoznia kell a rakodás befejezéséig. Mi a valószínűsége annak, hogy valamelyik kamionnak várakoznia kell a rakodásra?

9. Legyen egy sorozat  $n$ -edik eleme  $a_n = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$ , ahol  $n \in \mathbb{N}^+$ .

a) Állapítsa meg  $b$  és  $c$  értékét úgy, hogy minden  $n$ -re  $a_n = \frac{b}{2n+1} - \frac{c}{2n+3}$  legyen!

b) Számítsa ki az első 2005 tag összegének ötödik tizedesjegyét!