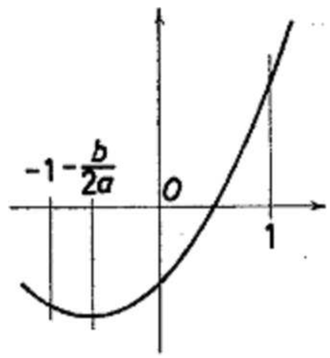
Az x, illetve y tengelyre való tükrözés a bizonyítandó állítást nem változtatja meg, ezért feltehető, hogy $a \geq 0$ és $b \geq 0$. Ekkor, ha $a > 0$, az $f(x)$ parabola csúcspontja az $x = -b/2a$ pontban van, ettől jobbra a parabola (egyre meredekebben) nő.



Tegyük fel, hogy van olyan $-1 \leq x_0 \leq 1$, ahol $f(x_0) < -2$. Ekkor, mivel f a $[0,\, 1]$ intervallumban szigorúan monoton nő, továbbá mivel a parabola szimmetrikus a csúcsponton átmenő, y-tengellyel párhuzamos egyenesre, feltehetjük, hogy $-b/2a \leq x_0 \leq 0$. Az $u = x_0 + 1/11$ számra a feladat feltétele csak úgy teljesülhet, ha $f(u + 1/11) \geq -1$, azaz $f(x_0 + 2/11) \geq -1$. Ezek szerint az $[x_0,\, x_0 + 2/11]$ intervallumon $f(x)$ értéke több, mint 1-gyel nőtt, és így több mint 1-gyel nő a további, $2/11$ hosszúságú intervallumokon is, tehát $f(x_0 + 8/11) > 2$. Az x_0-ra adott kikötéseink szerint $-1 < x_0 + 8/11 < 1$, azaz ebben az esetben van olyan $-1 \leqq x_1 \leqq 1$ pont is, ahol $f(x_1) > 2$. Hasonló meggondolással ugyanerre az eredményre juthatunk $a = 0$ mellett is.

Elegendő tehát megmutatnunk, hogy nincs olyan $-1 \leq x_1 \leq 1$ pont, amelyre $f(x_1) > 2$. Ha volna ilyen x_1 pont, akkor ismét a parabola szimmetriája, illetve a csúcsponttól jobbra a monoton növekedése miatt $f(1) > 2$ is teljesülne.

Az $u = 0$-ra a feltételek csak úgy teljesülnek, ha $f(1/11) \geq -1$, és $u = 10/11$-re csak úgy, ha $f(9/11) \leq 1$. Az ezekből adódó $2f(1) > 4$, $f(1/11) \geq -1$, valamint $-3f(9/11) \geq -3$ egyenlőtlenségeket összeadva a $-\dfrac{4}{11}\, b > 0$ egyenlőtlenséget kapjuk, ami ellentmond kezdeti $a \geq 0$, $b \geq 0$ feltételünknek. Ez éppen állításunkat bizonyítja.

Azt, hogy a feladat állítása nem élesíthető, mutatja az $f(x) = \dfrac{121}{40}\, x^2 - \dfrac{41}{40}$ példa.