

1. a) $9 - (x - 1)^2 > 0 \Rightarrow 9 > (x - 1)^2 \Rightarrow -3 < x - 1 < 3 \Rightarrow -2 < x < 4$.

b) A jobb oldal átalakítása után: $2|\sin x| = \sqrt{3} \Rightarrow |\sin x| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) Olyan $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ értékeket keresünk, amelyekre igaz, hogy: $-2 < x < 4$. Ezek a következők: $x = \pm \frac{\pi}{3}$; $x = \frac{2\pi}{3}$.

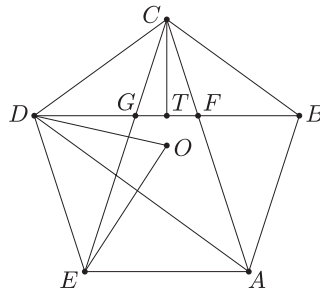
2. $\angle DOE = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$; $\angle ODE = \angle BCT = 54^\circ$; $\angle BCD = 108^\circ$; $\angle BCD = 108^\circ$; $\angle CBD = 36^\circ$. Legyen $CB = a$.

$$a = \frac{4}{\sin 54^\circ} \approx 4,94 \text{ cm.}$$

Az ötszög területe a DEO háromszög területének az ötszöröse.

$$t = 5 \cdot \frac{4,94^2 \sin^2 54^\circ}{2 \sin 72^\circ} \approx 41,99 \text{ cm}^2.$$

BF kiszámítása: $ABCD$ trapéz átlói az alapok arányában osztják egymást, mert a BCF és a DAF háromszögek hasonlóak. Legyen $BF = DG = x$, $\frac{8-x}{x} = \frac{8}{4,94}$; $x \approx 3,05$ cm. $DG = 3,05$ cm, $FG = 8 - 2x \approx 1,9$ cm.



3. a) Legyenek a számok sorrendben:

$$\overline{xy} = 10x + y; \quad \overline{yx} = 10y + x; \quad \overline{x0y} = 100x + y.$$

$$100x + y - (10y + x) = 10y + x - (10x + y);$$

$$y = 6x$$

egyenletből az $x = 1$ és az $y = 6$ megoldás adódik. Így az egyes táblákon a 16; 61; 106 számok láthatók. A keresett sebesség: $v = 106 - 61 = 61 - 16 = 45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) A kérdésre a következő egyenlet megoldása adja a választ. Legyen visszafelé a sebesség $u \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ekkor:

$$\frac{180}{2 + \frac{90}{u}} = 45 \cdot \frac{6}{5},$$

innen $u = 67,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

4. Könnyen belátható, hogy hárommillió Ft alatt a második befektetés a jobb, hiszen az éves kamat 6,4%-nál is magasabb, míg az elsőnél csak 5,5%, ill. 6%. Ezért először kiszámítjuk, hogy 3 millió Ft mennyire növekszik két év alatt, millió Ft-ban számolva:

Az első változat szerint

1. év: $1 \cdot 1,055 + 2 \cdot 1,06 = 3,175$

2. év: $3,175 + 0,175 \cdot 1,07 = 3,36225$.

További x összeget betéve:

$$T(x) = 1,07^2 x + 3,36225 = 1,1449x + 3,36225.$$

A második konstrukcióban

$$t(x) = 1,016^8 x + 3 \cdot 1,016^8 = 1,135402x + 3,406206.$$

A $T(x) = t(x)$ egyenlet gyöke adja azt az x értéket, melynél nagyobb x esetén az első, kisebb x esetén pedig a második befektetés a jobb.

$$1,1449x + 3,36255 = 1,135402x + 3,406206; \quad x \approx 4,596336.$$

Tehát 4 596 336 Ft-nál nagyobb összegű tőke esetén az első befektetési forma kedvezőbb.

5. a) A háromnál nagyobb prímszámok páratlanok, tehát mindkét szomszédjuk páros. Legyen a három szám: $p-1$; p ; $p+1$. Három egymást követő természetes szám közül az egyik osztható 3-mal. De ez nem lehet a p , mert háromnál nagyobb. Így a $p-1$ és a $p+1$ közül az egyik hárommal is és kettővel is osztható, tehát osztható hattal.

b) $n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n)$ és a kisebbik tényező

$$n^2 + 2 - 2n = (n-1)^2 + 1 > 1.$$

A második tényező meg ennél is nagyobb, a szorzat tehát összetett szám.

6. Kétféleképpen fordulhat elő, hogy fiú is és lány is van a felelők között: vagy két fiú és egy lány, vagy egy fiú és két lány felel. Ezen lehetőségek száma:

$$\binom{6}{2} \cdot 4 + \binom{4}{2} \cdot 6 = 96.$$

Az összes lehetőség: $\binom{10}{3} = 120$. Így a kért valószínűség: $p = \frac{96}{120} = 0,8$.

$$7. \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{1}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{1 - \frac{\sin^2 2x}{2}} = \frac{2}{2 - \sin^2 2x},$$

$$-1 \leq -\sin^2 2x \leq 0,$$

$$1 \leq 2 - \sin^2 2x \leq 2,$$

$$2 \geq \frac{2}{2 - \sin^2 2x} \geq 1.$$

A függvény értékkészlete az $1 \leq x \leq 2$ halmaz.

Maximum: $\sin^2 2x = 1$, ekkor

$$\sin 2x = \pm 1; \quad 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Minimum: $\sin^2 2x = 0$, ekkor

$$\sin 2x = 0, \quad 2x = k\pi; \quad x = k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

8. a) Abból, hogy $70\% + 60\% = 130\%$, az következik, hogy a társaság 30%-a mindkét nyelven beszél. Így $70\% - 30\% = 40\%$ csak németül, $60\% - 30\% = 30\%$ csak franciául beszél.

A válasz: $p = \frac{30}{100} = 0,3$.

b) Az a 12 személy nem tud franciául, aki csak németül beszél. Ez 40%. Akkor a 30% 9 fő, akik csak franciául beszélnek. Tehát azok száma, akik csak egy nyelvet beszélnek $12 + 9 = 21$.

c) Az eddigiekből kiszámolható, hogy csak németül 12-en, csak franciául 9-en, mindkét nyelven 9-en beszélnek. A 6 érkező tag a harmadik számot 15-re változtatja. A társaság most már 36 tagú. A válasz: $p = \frac{9}{36} = 0,25$.

9. Legyen: $a_1 = x$, $b_1 = x + 8$ és $a_2 = x - 1$, $b_2 = y$. A két terület egyenlőségéből felírhatjuk, hogy

$$(x-1)y = x(x+8), \quad \text{ebből}$$

$$y = \frac{x(x+8)}{x-1} = \frac{x^2 + 8x}{x-1} = \frac{x^2 - x + 9x}{x-1} = x + \frac{9x}{x-1},$$

$$y = \frac{9x - 9 + 9}{x-1} + x = x + 9 + \frac{9}{x-1} = x - 1 + \frac{9}{x-1} + 10,$$

$$y = 3 \left(\frac{x-1}{3} + \frac{3}{x-1} \right) + 10.$$

Elég a zárójelben lévő kifejezés minimumát meghatározni. Ez egy pozitív számnak és a reciprokának az összege, amely akkor minimális, ha mindkét tag 1.

Tehát $\frac{x-1}{3} = 1$, azaz $x = 4y = \frac{4 \cdot 12}{3} = 16$. Válasz: $a_1 = 4$; $b_1 = 12$; $a_2 = 3$; $b_2 = 16$.