**I. megoldás.** A feltételekből következik, hogy $-x_2=x_1+x_3$, valamint $-y_2=y_1+y_3$. Ezeket összeszorozva, majd a további $-x_2y_2=x_1y_1+x_3y_3$ feltétellel összehasonlítva kapjuk a

$$2x_2y_2=x_1y_3+x_3y_1 \tag{2}$$

összefüggést. Hasonlóan igazolható az is, hogy

$$2x_1y_1=x_2y_3+x_3y_2. \tag{3}$$

(1) helyett előbb belátjuk, hogy

$$\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\frac{y_1^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}=\frac{x_2^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\frac{y_2^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}=\frac{x_3^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\frac{y_3^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}. \tag{4}$$

Például az első egyenlőséget átrendezve elegendő igazolnunk a

$$2x_1^2y_1^2+x_1^2y_3^2+x_3^2y_1^2-2x_2^2y_2^2-x_2^2y_3^2-x_3^2y_2^2=0$$

egyenlőséget. (2)-t és (3)-t behelyettesítve, majd némi átalakítás után

$$(x_1y_3-x_3y_1+x_2y_3-x_3y_2)(x_1y_3-x_3y_1-x_2y_3+x_3y_2)=0.$$

Ám itt az első tényező valóban nulla, hiszen

$$x_1y_3-x_3y_1+x_2y_3-x_3y_2=y_3(x_1+x_2)-x_3(y_1+y_2)$$
$$\text{és}\qquad x_1+x_2=-x_3,\qquad \text{valamint}\qquad y_1+y_2=-y_3.$$

Ezek után (1) abból következik, hogy a (4)-ben szereplő kifejezések összege 2.

*Horváth Ákos* (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., III. o. t.)

**II. megoldás.** Legyen $x_1^2+x_2^2+x_3^2=A$, $y_1^2+y_2^2+y_3^2=B$, továbbá

$$a_i=\frac{x_i}{\sqrt{A}},\qquad b_i=\frac{y_i}{\sqrt{B}},\qquad i=1,\ 2,\ 3.$$

Feltevéseink új jelöléseinkkel azt jelentik, hogy

$$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0, \tag{2}$$

új változóinkra még az is teljesül, hogy

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2=1. \tag{3}$$

A bizonyítandó (1) összefüggés pedig

$$a_1^2+b_1^2=\frac{2}{3}\,. \tag{4}$$

Elegendő tehát azt bizonyítani, hogy a (2) és (3) összefüggésekből következik (4).

Ha **i**, **j**, **k** a tér páronként merőleges egységvektorai, és

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k},$$
$$\mathbf{c}=\frac{1}{\sqrt3}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt3}\mathbf{j}+\frac{1}{\sqrt3}\mathbf{k},$$

akkor **a**, **b**, **c** is egységvektorok. Például **a** első koordinátája, $a_1$ azt jelenti, hogy **a** vetülete **i**-n $a_1\mathbf{i}$. Itt azonban az **a** és **i** egységvektorok szerepe még szimmetrikus, tehát szerepüket felcserélve azt kapjuk, hogy **i** vetülete **a**-n $a_1\mathbf{a}$, és így $b_1\mathbf{i}$ vetülete **a**-n $a_1b_1\mathbf{a}$. Mivel vektorok összegének vetülete egyenlő a vetületek összegével, ezek szerint **b**-nek **a**-n levő vetülete

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\mathbf{a}. \tag{5}$$

Tehát (2) utolsó összefüggése azt jelenti, hogy **b** vetülete **a**-n a null-vektor, vagyis **b** merőleges **a**-ra. Az első két összefüggés pedig azt jelenti (2)-ben, hogy **a** is, **b** is merőleges **c**-re.

Ezek szerint (2) azt jelenti, hogy $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ is páronként merőlegesek egymásra. Mivel $\mathbf{i}$ vetülete $\mathbf{a}$-n $a_1\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$-n $b_1\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$-n $\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{c}$, és ezeknek a vetületeknek az összege épp az $\mathbf{i}$ vektort adja:

$$\mathbf{i} = a_1\mathbf{a} + b_1\mathbf{b} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{c},$$

a bizonyítandó (1) összefüggés pedig a térbeli Pithagorasz-tételből és abból következik, hogy $\mathbf{i}$ egységvektor.

*Megjegyzés.* A feladat szövegében – mint azt többen észrevették – sajtóhiba volt. A versenyzők zöme az itt közölt állítást igazolta. Teljes értékű megoldásnak fogadtuk el azt is, ha valaki az eredeti állítás hibás voltát igazolta.