1. Határozzuk meg azon egyenes egyenletét, amely átmegy a $P(4;1)$ ponton és merőleges a $3x-2y=22$ egyenletű egyenesre, illetve amely párhuzamos vele.

2. Traianus császár uralkodásának első éveiben a Vesta szüzek temploma (V) és egy új forrás (F) között vízvezetéket kellett építeni. A várost és a forrást elválasztó hegyet olcsóbb volt átfúrni, mint a vízvezetéket az egyenes vonaltól eltérítve lefektetni. Két oldalról akarták elkezdeni a fúrást, hogy gyorsabban megépülhessen a tervezett vezeték. Szerencsére a városban tartózkodott az alexandriai Menelaosz, aki a következőképpen oldotta meg a problémát: Ahhoz, hogy a fúrást végző csapatok találkozzanak, ismerni kell a VF egyenes állását. Ennek meghatározásához egy alappontot (A) vett fel, amelyik a várostól 5, a forrástól 9 km távolságra van, s megmérte a VAF szöget: 97,8°.

a) Határozzuk meg, milyen hosszú lesz a vízvezeték.

b) Mekkora szöget zárjon be a fúrás helyét megadó VF félegyenes a VA félegyenessel, illetve az FV félegyenes az FA félegyenessel?

3. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert az 1-től különböző pozitív valós számpárok halmazán:

$$x^{\log_y x}=y^4; \qquad x+\frac{1}{y^2}=\frac{82}{9}.$$

4. Egy 36 000 Ft-os kerékpárt leértékeltek valahány %-kal. Mivel így sem fogyott eléggé, kis idő múlva újra leértékelték néhány %-kal. Mindkét esetben a leértékelés egyjegyű egész szám volt. Így 31 806 Ft-ért árulták.

Hány %-kal értékelték le először és hány %-kal másodszor a televíziót?

5. A Louvre udvarán felépített üvegpiramis (négyzet alapú egyenes gúla) alapnégyzetének oldala 15. A gúlába a tervezők olyan kockát építettek be, amelynek egy lapja illeszkedik a gúla alaplapjára, szemközti lapjának csúcsai pedig a gúla oldaléleire. A kocka oldalfalai, valamint a teteje szintén üvegből vannak. Mekkora az üvegpiramis térfogata, ha az alapnégyzetének beborítására ötször annyi anyagot használtak fel, mint a kocka üvegfalainak elkészítésére?

6. Egy számtani sorozat első eleme -13. A sorozat n. eleme ($1<n$) egyenlő a sorozat differenciájával, ami egy pozitív egész szám. Számítsuk ki a sorozat első n elemének összegét.

7. A sürgősségi osztályra sokkos állapotban lévő beteget szállítottak. A szívritmus elemző készülék meghatározta, hogy a beteg szívritmusa az

$$f(x)=\sin^2 2x+2\cdot\cos^2 x-\frac{5}{4}$$

függvény szerint változik. Green doktor terápiája szerint akkor kell a gyógyszert adagolni, amikor a szívritmus a legkisebb és legnagyobb értékét veszi fel a $[0;\pi]$ intervallumban, és az adag mennyisége a legkisebb és legnagyobb érték szerint változzon. Sajnos ekkor a gép elromlott. Szerencsére Carter doktor egyben műkedvelő matematikus is, így sikeresen meghatározta a kérdéses szélsőérték-helyeket és szélsőértékeket. Milyen eredményre jutott?

8. Az ABC háromszög C csúcsából induló f_1 és f_2 szögharmadolók a szemközti oldalt rendre a c_1, c_2, c_3 szakaszokra bontják. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{f_1}{f_2}=\sqrt{\frac{c_1(c_2+c_3)}{c_3(c_1+c_2)}}.$$