Feladatmegoldásnál, vagy matematikai irodalom olvasásakor hasznos lehet egy könnyen használható, kéznél lévő matematikai fogalom- és tételgyűjtemény. Egy ilyen kislexikon összeállítására teszünk most kísérletet. Javasoljuk, hogy az Olvasó igényei, ízlése és tudása alapján egészítse ki, és így személyre szabott gyűjtemény birtokába juthat.

A kislexikonnal kapcsolatos minden kiegészítést, javítást szívesen látunk.

*

1. definíció: Az A és B halmaz *Descartes-féle szorzatának* ($A \times B$) nevezzük azt a halmazt, amely az összes olyan $(x; y)$ párból áll, amelyre $x \in A$; $y \in B$. Hasonlóan definiálható több halmaz Descartes-szorzata is.

1. tétel (skatulya-elv vagy *Dirichlet*-elv): Ha egy n elemű halmaz k részhalmaz egyesítéseként áll elő, akkor egyiküknek legalább $\dfrac{n}{k}$ eleme van. Ezt a tételt leggyakrabban abban az esetben használjuk, amikor $k < n$ és a részhalmazok páronként diszjunktak (nincs közös részük).

2. tétel (a teljes indukció elve): Az $U(n)$ állításokra ($n = 1, 2, \dots$) teljesülnek a következők:

– az $U(1)$ állítás igaz

– minden $n \in \mathbb{N}$ esetén abból, hogy $U(1), \dots, U(n)$ igaz, következik, hogy $U(n+1)$ is igaz.

Ekkor az $U(n)$ állítás igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

A továbbiakban $f\colon A \to B$ olyan f függvényt jelöl, amelynek értelmezési tartománya az A halmaz, értékkészlete pedig a B halmaz.

2. definíció: Adott egy $f\colon A \to B$ függvény. A $g\colon B \to A$ függvényt az f függvény *inverzének* nevezzük (jelölése: $g = f^{-1}$), ha teljesülnek az alábbiak: $g\big(f(x)\big) \equiv x$; $f\big(g(y)\big) \equiv y$; $x \in A$; $y \in B$.

3. tétel: Az $f\colon A \to B$ függvénynek pontosan akkor létezik inverz függvénye, ha minden $y \in B$-hez található olyan $x \in A$, amire $f(x) = y$, továbbá az A bármely két különböző x_1 és x_2 elemére $f(x_1)$ és $f(x_2)$ is különbözők.

3. definíció: Az $f\colon A \to B$ és a $g\colon B \to C$ függvények *kompozíciójának* (*összetett függvény*) nevezzük azt a $h\colon A \to C$ függvényt, amelyre $h(x) = g\big(f(x)\big)$; $x \in A$.

Hasonló módon definiálható az

$$f_1\colon A_1 \to A_2; \quad f_2\colon A_2 \to A_3; \quad \dots; \quad f_n\colon A_n \to A_{n+1}$$

függvények kompozíciója is. Az $f\colon A \to A$ függvény n-szeres kompozíciójaként adódó függvényt $f^{(n)}$-nel jelöljük. Így az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén az

$$f^{(n)}(x) = f\Big(f\big(f\big(\dots f(x)\big)\big)\dots\Big)$$

összetett függvény, vagy az $f^{-1}(x)$ inverz függvény nem tévesztendő össze azzal a függvénnyel, amelynek értéke minden x esetén $\big(f(x)\big)^n$, illetve $\big(f(x)\big)^{-1}$.

*

4. definíció: Az $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvényt

– *felülről korlátosnak* nevezzük, ha létezik olyan $M \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in A$ esetén $f(x) \le M$.

– *alulról korlátosnak* nevezzük, ha létezik olyan $m \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in A$ esetén $f(x) \ge m$.

Ha az $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvény alulról és felülről is korlátos, akkor *korlátos* függvénynek nevezzük.

5. definíció: Legyen $A \subset \mathbb{R}$ (általában egy intervallum) és $f\colon A \to \mathbb{R}$ egy függvény. Ha bármely A-beli $x_1 < x_2$ számpárra teljesül, hogy

– $f(x_1) < f(x_2)$, akkor f *szigorúan monoton növekvő* az A halmazon;

– $f(x_1) > f(x_2)$, akkor f *szigorúan monoton csökkenő* az A halmazon;

– $f(x_1) \le f(x_2)$, akkor f *monoton növekvő* (*nemcsökkenő*) az A halmazon;

– $f(x_1) \ge f(x_2)$, akkor f *monoton csökkenő* (*nemnövekvő*) az A halmazon.

Az $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvények, ahol $A \subset \mathbb{R}$, speciális esetekben számsorozatokat alkothatnak. Ilyen például az $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, vagy $a\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ hozzárendelés, amelyek értékeit a_n-nel jelöljük. A 4. és 5. definíció alapján így beszélhetünk korlátos; alulról, felülről korlátos; növekvő, csökkenő, nemnövekvő, nemcsökkenő; monoton és szigorúan monoton sorozatokról.

*

4. tétel: Minden $a, b \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesülnek az alábbi egyenlőségek:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\big(a^n + a^{n-1}\cdot b + \ldots + a \cdot b^{n-1} + b^n\big)$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\big(a^{2n} - a^{2n-1}\cdot b + \ldots - a \cdot b^{2n-1} + b^{2n}\big)$$

$$a^{2n} - b^{2n} = (a+b)\big(a^{2n-1} - a^{2n-2}\cdot b + \ldots + a \cdot b^{2n-2} - b^{2n-1}\big)$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}; \quad \text{ha} \quad a \ge \sqrt{b}; \quad b \ge 0.$$

*

5. tétel (*Bernoulli*-féle egyenlőtlenség): Minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén, ha $a > -1$; $a \ne 0$; $b \ne 0$; $b \ne 1$; teljesül, hogy

$$(1+a)^b < 1 + ab, \quad \text{ha} \quad 0 < b < 1$$

$$(1+a)^b > 1 + ab, \quad \text{ha} \quad b \notin [0;1].$$

6. definíció: Az $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ számok *számtani (aritmetikai) közepének* az

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

számot nevezzük.

Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nemnegatív valós számok *mértani (geometriai) közepe:*

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok *harmonikus közepe:*

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valós számok *négyzetes (kvadratikus) közepe:*

$$Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

6. tétel (a közepek közti egyenlőtlenségek): Pozitív $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok esetén $H_n \le G_n \le A_n \le Q_n$. Ha az n szám között vannak különbözők, akkor mindenütt határozott egyenlőtlenség áll. Ha az n szám között előfordul a nulla is, akkor H_n nem értelmes, a $G_n \le A_n \le Q_n$ egyenlőtlenség viszont továbbra is fennáll.

Kiegészítés: Definiálható a *k-adik hatványközép* is, ahol k tetszőleges 0-tól különböző valós szám:

$$A_n^{(k)} = \sqrt[k]{\frac{a_1^k + \ldots + a_n^k}{n}}.$$

Látható, hogy $A_n^{(1)} = A_n$; $A_n^{(2)} = Q_n$; $A_n^{(-1)} = H_n$. Belátható, hogy $\lim\limits_{k\to 0} A_n^{(k)} = G_n$. Az is teljesül, hogy $k_1 < k_2$ esetén $A_n^{(k_1)} \le A_n^{(k_2)}$, továbbá $\lim\limits_{k\to\infty} A_n^{(k)} = \max(a_i)$ és $\lim\limits_{k\to-\infty} A_n^{(k)} = \min(a_i)$. Ily módon $\min(a_i) \le A_n^{(k)} \le \max(a_i)$.

Beszélhetünk *súlyozott hatványközepekről* is:

$$A_n^{(k)'} = \sqrt[k]{\frac{p_1 a_1^k + \ldots + p_n a_n^k}{p_1 + \ldots + p_n}},$$

ahol $p_i > 0$. Legyen $G_n' = \sqrt[(p_1+\ldots+p_n)]{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{p_n}}$. Ekkor $G_n' \le A_n^{(k)'}$.

7. tétel: Az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat ($n \in \mathbb{N}$) monoton növekvő, és létezik egy legkisebb e-vel jelölt korlát, amelyre fennáll, hogy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Az ‚e' alapú logaritmust természetes alapúnak nevezzük és ln-nel jelöljük: $\ln x = \log_e x$.

7. definíció: Az előjelfüggvényt a következőképpen definiáljuk („szignum" függvény):

$$\operatorname{sign}(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

8. definíció: Az x szám *egész részének* a legnagyobb olyan egész számot nevezzük, amely x-nél nem nagyobb, és ezt $[x]$-szel jelöljük (ily módon $x-1 < [x] \le x$). Az x *törtrészére* pedig: $\{x\} = x - [x]$ (tehát $0 \le \{x\} < 1$).

8. tétel: Az egészrészfüggvény nemcsökkenő függvény, a törtrész pedig periodikus függvény, amelynek 1 a periódusa.

*

9. definíció: Legyen adva a és b, két egész szám, ahol $b \ne 0$. A $q \in \mathbb{Z}$ és az $r \in \{0; 1; \ldots; |b|-1\}$ számokat az $a : b$ maradékos osztás *hányadosának,* illetve *maradékának* nevezzük, ha teljesül, hogy $a = qb + r$. Ha $r = 0$, akkor azt mondjuk, hogy b osztja az a-t, vagy másképpen, az a szám a b többszöröse, illetve az a-nak b az osztója (jelölés: $b \mid a$).

10. definíció: Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nem 0 egész számok *legkisebb közös többszörösének* azt a legkisebb pozitív egész számot nevezzük, amely a számok mindegyikének többszöröse (jelölése $[a_1; a_2; \ldots; a_n]$).

11. definíció: Az $a_1, \ldots, a_n$ egészek *legnagyobb közös osztója* (a számok nem mind 0-k) az a legnagyobb természetes szám, amely a számok mindegyikének osztója (jelölése: $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$).

9. tétel: Minden a, b természetes szám esetén $(a; b) \cdot [a; b] = a \cdot b$.

12. definíció: Az a és b egészeket *relatív prímeknek* nevezzük, ha $(a; b) = 1$.

Kiegészítés: Számok legnagyobb közös osztójára teljesül, hogy többszöröse minden közös osztónak. Hasonló tulajdonsággal rendelkezik a számok legkisebb közös többszöröse: osztója valamennyi közös többszörösnek. Két pozitív egész legnagyobb közös osztóját az ún. *euklideszi algoritmus* segítségével (is) megkaphatjuk:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1; & 0 &< r_1 < b, \\ b &= r_1 q_2 + r_2; & 0 &< r_2 < r_1, \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3; & 0 &< r_3 < r_2, \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n; & 0 &< r_n < r_{n-1}, \\ r_{n-1} &= r_n q_{n+1}; & (r_{n+1} &= 0). \end{aligned}$$

Ekkor r_n a legnagyobb közös osztó.

A számok prímtényezős felbontásából is megkapható a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös. Legyen $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$; $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$, ahol $0 \le \alpha_i$; $0 \le \beta_i$. Ekkor

$$(a; b) = p_1^{\min(\alpha_1; \beta_1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\min(\alpha_n; \beta_n)} \quad \text{és} \quad [a; b] = p_1^{\max(\alpha_1; \beta_1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\max(\alpha_n; \beta_n)}.$$

Ez az alak több számra is kiterjeszthető.

13. definíció: Legyenek adottak az a, b, m egészek, $m > 1$. Az a számot *kongruensnek* mondjuk b-vel az m modulusra nézve ($a \equiv b \pmod{m}$; olvasva: a kongruens b moduló m), ha $m \mid (a-b)$. Ellenkező esetben az a nem kongruens b-vel ($a \not\equiv b \pmod{m}$).

10. tétel: Adottak az a, b, c, d, m, k egészek, ahol $k > 0$; $m > 1$. Ekkor fennállnak:

a) ha $a \equiv b \pmod{m}$ és $b \equiv c \pmod{m}$, akkor $a \equiv c \pmod{m}$.

b) ha $a \equiv b \pmod{m}$ és $c \equiv d \pmod{m}$, akkor $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ és $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$.

c) ha $a \equiv b \pmod{m}$, akkor minden természetes n-re $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

d) ha $a \equiv b \pmod{m}$, akkor $ak \equiv bk \pmod{mk}$.

e) ha $a \equiv b \pmod{m}$ és $k \mid a$; $k \mid b$; $k \mid m$; akkor $\frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k} \ \left(\mathrm{mod}\left(\frac{m}{k}\right)\right)$.

11. tétel: Minden a, b egész és n természetes számra fennáll:

a) $a - b \mid a^n - b^n$.

b) $a + b \mid a^{2n-1} + b^{2n-1}$.

c) $a + b \mid a^{2n} - b^{2n}$.

Ezek az oszthatóságok a 4., illetve a 10.c. tételekből is következnek.

Legyen az m tetszőleges, 2-nél nagyobb egész. Az egész számok m-mel osztva maradékul a $0, 1, \ldots, m-1$ számok közül pontosan az egyiket adhatják. Egy adott egész szám hatványai nem feltétlenül adják ki ezen maradékok mindegyikét.

12. tétel: Az m modulusra nézve $(3 \leq m \leq 10)$ az egész számok n. hatványai $(2 \leq n \leq 5)$ pontosan az alábbi táblázatban közölt maradékokat adhatják:

$m \setminus n$	2	3	4	5
3	0; 1	0; 1; 2	0; 1	0; 1; 2
4	0; 1	0;1; 3	0; 1	0; 1; 3
5	0; 1; 4	0; 1; 2; 3; 4	0; 1	0–4
6	0; 1; 3; 4	0; 1; 2; 3; 4; 5	0; 1; 3; 4	0–5
7	0; 1; 2; 4	0; 1; 6	0; 1; 2; 4	0–6
8	0; 1; 4	0; 1; 3; 5; 7	0; 1	0; 1; 3; 5; 7
9	0; 1; 4; 7	0; 1; 8	0; 1; 4; 7	0; 1; 2; 4; 5; 7; 8
10	0; 1; 4; 5; 6; 9	0–9	0; 1; 5; 6	0–9

A pozitív egészeket általában a tízes számrendszerben írjuk fel. Ezen felírásnak létezik a következő általánosítása.

14. definíció: Az $n \in \mathbb{N}$ szám g *alapú számrendszerbeli alakja* $(g \in \mathbb{N};\ g > 1)$ $\overline{a_1 \ldots a_m}_{\smile g}$, ha fennáll: $n = a_1 \cdot g^{m-1} + a_2 \cdot g^{m-2} + \ldots + a_{m-1} \cdot g + a_m$; ahol az a_i számok g-nél kisebb nemnegatív egészek és $a_1 \neq 0$.

13. tétel: Minden 1-nél nagyobb természetes g esetén minden n-re egyértelműen létezik ez a felírás.

14. tétel: Minden pozitív egész szám kongruens a tízes számrendszerbeli felírásában szereplő számjegyeinek összegével mod 9 (ez $(g-1)$-re is igaz, $\underset{\smile}{g}$ alapú felírással).

15. definíció: Legyen $m, n \in \mathbb{Z}$; $n \geq m \geq 0$. Az $\binom{n}{k}$ *binomiális együttható* az $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ számot jelöli, ahol

$$n! = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, & \text{ha } n \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{ha } n = 0. \end{cases}$$

15. tétel: Minden pozitív m, n egész esetén teljesülnek az alábbiak:

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$;

b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, ha $n \geq k \geq 0$;

c) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, ha $n > k > 0$.

16. tétel (binomiális tétel): Minden $a, b \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k} \cdot a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n} \cdot b^n.$$

Ebből következnek az alábbiak:

17. tétel:

a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$; $a=b=1$ helyettesítéssel;

b) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$; $a=1$, $b=-1$ helyettesítéssel.

16. definíció: Azon 1-nél nagyobb természetes számokat, amelyeknek az 1-en és önmagukon kívül nincs más pozitív egész osztója, *prímszámoknak* (*törzsszámoknak*) nevezzük. A többi 1-nél nagyobb egészt *összetett számnak* hívjuk. Az 1 nem prím és nem is összetett.

Kiegészítés: Bizonyítható, hogy egy $p>1$ egész pontosan akkor prím, ha minden a, b egészre abból, hogy $p \mid ab$, következik, hogy $p \mid a$ vagy $p \mid b$.

18. tétel (a számelmélet alaptétele): Minden összetett szám felírható néhány, nem feltétlenül különböző prímszám szorzataként, ahol ez a felírás a sorrendtől eltekintve egyértelmű (egytényezős szorzatokat is elfogadva, ez a prímekre is igaz).

19. tétel: Végtelen sok prímszám van.

20. tétel (*Legendre*-féle formula): Az $n!$ prímtényezős felbontásában a p prímszám kitevőjének értéke:

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^k}\right]+\ldots$$

(nagy k esetén $\left[\frac{n}{p^k}\right]=0$).

A következő három tétel a relatív prím számpárok tulajdonságairól szól.

21. tétel: Legyenek a, b, c egészek és $c\neq 0$. Ekkor, ha $c \mid ab$ és $(b;c)=1$, akkor $c \mid a$.

22. tétel: Legyenek a, b, c, m természetes számok. Ekkor ha $a\cdot b=c^m$ és $(a;b)=1$, akkor $a=a_1^m$ és $b=b_1^m$ alakú, ahol $a_1, b_1 \in \mathbb{N}$ és $a_1\cdot b_1=c$; $(a_1;b_1)=1$.

23. tétel (kínai maradéktétel): Legyenek adottak az $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 0-tól különböző, páronként relatív prím egész számok. Ekkor minden $a_1, a_2, \ldots, a_k$ egészekből álló k-ashoz létezik olyan x egész szám, amely $i=1,2,\ldots,k$ esetén kielégíti az $x\equiv a_i \pmod{m_i}$ kongruencia-rendszert. A kongruenciarendszer megoldásai éppen az $x+n\cdot m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_k$ alakú számok, ahol n egész.

24. tétel: Ha a és b egészek, amelyek nem mindegyike 0, akkor léteznek olyan p, q egészek, amelyekre $(a;b)=a\cdot p+b\cdot q$.

25. tétel (a *kis Fermat*-tétel): Ha a p prímszám nem osztója az a számnak, akkor $p \mid a^{p-1}-1$.

A tételt így is fogalmazhatjuk:

26. tétel: Legyen p prímszám. Ekkor minden a egész szám esetén $a^p\equiv a \pmod{p}$.

Kiegészítés: Jelölje $\varphi(n)$ az n-nél kisebb, n-hez relatív prím számok számát. Ha n prímtényezős felbontása $p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ alakú, akkor

$$\varphi(n)=n\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

Legyen $(a;n)=1$. Ekkor $a^{\varphi(n)}\equiv 1 \pmod{n}$. (*Euler*-tétel)

*

27. tétel (*Bolzano* tétele): Ha az $f\colon [a;b]\to\mathbb{R}$ függvény folytonos az $[a;b]$ intervallumban, akkor f minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz.

Ennek speciális esete a következő tétel:

28. tétel: Ha az $f\colon [a;b]\to\mathbb{R}$ függvény folytonos $[a;b]$-ben és a végpontjaiban felvett függvényértékek előjele különböző, akkor van olyan $c\in(a;b)$, amire $f(c)=0$ teljesül.

29. tétel (*Weierstrass* tétele): Ha egy $[a;b]$-n értelmezett f valósértékű függvény folytonos $[a;b]$-n, akkor $\exists\, c,d\in[a;b]$, hogy $\forall\, x\in[a;b]$-re $f(c)\le f(x)\le f(d)$.

30. tétel: Zárt intervallumon folytonos függvény korlátos.

31. tétel: Legyen $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenciálható az I intervallumon. Az f függvény akkor és csak akkor nemcsökkenő (megfelelően: nemnövekvő), ha $\forall\, x \in I$-re $f'(x) \geq 0$ (megfelelően: $f'(x) \leq 0$). Ha $\forall\, x \in I$-re $f'(x) > 0$ (megfelelően: $f'(x) < 0$), akkor az f függvény növekvő (megfelelően: csökkenő).

17. definíció: Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvényt *konvexnek* nevezzük I-n, ha tetszőleges $x, y \in I$ és $\alpha \in [0;1]$ valós számokra $f\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$. Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ *konkáv,* ha $g(x) = -f(x)$ konvex.

32. tétel: Legyen $f\colon I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható az I-n. Az f függvény akkor és csak akkor konvex (megfelelően: konkáv) az I intervallumon, ha $\forall\, x \in I$-re $f''(x) \geq 0$ (megfelelően: $f''(x) \leq 0$).

33. tétel (*Lagrange* tétele): Legyen $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ az $[a;b]$-n folytonos és a belsejében differenciálható függvény. Ekkor $\exists\, c \in (a;b)$, amelyre $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

34. tétel (*Rolle* tétele): Legyen $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ az $[a;b]$-n folytonos és a belsejében differenciálható függvény, amelyre $f(a) = f(b)$. Ekkor $\exists\, c \in (a;b)$, amelyre $f'(c) = 0$.

*

18. definíció: *Komplex számok* $\mathbb{C}$ halmazának nevezzük a valós számokból álló rendezett párok halmazát, amelyen az összeadás és szorzás műveletét a következő alakban adjuk meg:

$$(a;b) + (c;d) = (a+c; b+d)$$

$$(a;b) \cdot (c;d) = (ac - bd; ad + bc).$$

A komplex számokat rendszerint $z = a + b \cdot i$ alakban írjuk, ahol a és b valós számok, és $i^2 = -1$. Az a számot a z komplex szám *valós,* a b-t pedig a *z képzetes részének* nevezzük.

19. definíció: A $z = a + b \cdot i$ komplex szám *abszolút értéke* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

35. tétel: Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$-re

$$|zw| = |z| \cdot |w|.$$

36. tétel (háromszög-egyenlőtlenség): Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$-re

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

20. definíció: A nem nulla $z = a + b \cdot i$ komplex szám *argumentuma* az a φ szög, amely teljesíti a következőket: $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$, ahol $r = |z|$, $-\pi < \varphi \leq \pi$ (jelölése $\varphi = \arg z$).

37. tétel (a komplex szám trigonometrikus alakja): Tetszőleges nem nulla $z = a + b \cdot i$ komplex szám felírható $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ alakban, ahol $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

21. definíció: A $\overline{z} = a - b \cdot i$ komplex számot a $z = a + b \cdot i$ komplex szám *konjugáltjának* nevezzük.

A komplex számokat ábrázolhatjuk a sík pontjaiként is, az abszcissza a komplex szám valós, az ordináta a képzetes része. A koordinátasíkon a komplex szám tükörképe a valós tengelyre a komplex szám konjugáltja.

38. tétel: Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$-re: $|\overline{z}| = |z|$, $z\overline{z} = |z|^2$, $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{zw}$, ha $z \neq 0$, akkor $\arg z = -\arg \overline{z}$.

39. tétel: Ha $z = a + b \cdot i$ és $w = c + d \cdot i$, $z, w \in \mathbb{C}$, akkor

$$\frac{z}{w} = \frac{a + b \cdot i}{c + d \cdot i} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{cb - ad}{c^2 + d^2} \cdot i.$$

40. tétel: A trigonometrikus alakban megadott komplex számokra

$$\big(r_1(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)\big)\big(r_2(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)\big) =$$

$$= r_1 \cdot r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big),$$

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big).$$

41. tétel (*de Moivre* tétele): $\left[r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\cdot\sin n\varphi)$.

42. tétel: Nem nulla $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$-re a $z^n = 1$ egyenletnek n különböző megoldása van a komplex számok halmazán:

$$x_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\cdot\sin\frac{2\pi k}{n}, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Ezek az úgynevezett n-edik egységgyökök.

*

22. definíció: *Polinomnak* nevezzük az olyan valós vagy komplex argumentumú függvényt, amely felírható a következő alakban:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

ahol $n \in \mathbb{N}^+$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Ha $n \geq 1$, akkor $a_n \neq 0$. Ekkor az n számot a $P(x)$ polinom *fokszámának* nevezzük és $\deg P$-vel jelöljük.

Kiegészítés: Ha $n = 0$, azaz $P(x) = a_0$, ahol $a_0 \neq 0$, akkor $\deg P = 0$. Ha $P(x) = 0$ minden x-re, akkor $P(x)$-et *zéruspolinomnak* nevezzük, és a fokszámát $-\infty$-nek értelmezzük. Ha $P(x)$ nem zéruspolinom, akkor a legmagasabb fokú tag együtthatóját a $P(x)$ *főegyütthatójának* nevezzük.

43. tétel: Legyen $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ és $Q(x) = b_m x^m + \ldots + b_0$ két polinom. $P(x) = Q(x)$ akkor és csak akkor teljesül minden x-re, ha $n = m$ és $a_i = b_i\ \forall\, i \in \{0, 1, \ldots, n\}$-re.

44. tétel: Legyenek $P(x)$, $Q(x)$ tetszőleges polinomok,

a) ha $T(x) = P(x) + Q(x)$, akkor $\deg T < \max(\deg P; \deg Q)$ és ha $\deg P \neq \deg Q$, akkor $\deg T = \max(\deg P; \deg Q)$,

b) ha $W(x) = P(x)\cdot Q(x)$ és ha $P(x) \not\equiv 0$ és $Q(x) \not\equiv 0$, akkor $W(x) \not\equiv 0$ és $\deg W = \deg P + \deg Q$.

45. tétel: Legyen adva két tetszőleges polinom, $P(x)$ és $Q(x)$ úgy, hogy $\deg Q > 0$. Ekkor léteznek olyan $S(x)$ és $R(x)$ polinomok, amelyekre

$$P(x) = S(x)\cdot Q(x) + R(x) \quad \text{és} \quad \deg R < \deg Q.$$

46. tétel: Ha az előző tételben P és Q valós együtthatósak, akkor R és S is azok. Ha P és Q racionális együtthatósak, akkor R és S is azok. Ha P és Q egész együtthatós volt, továbbá Q főegyütthatója $+1$ vagy -1, akkor S és R is egész együtthatós polinomok.

47. tétel (*Bezout* tétele): $P(x)$ és $x - x_0$ osztási maradéka $P(x_0)$.

48. tétel: $x - x_0$ akkor és csak akkor osztja $P(x)$-et, ha x_0 gyöke a $P(x)$ polinomnak, azaz $P(x_0) = 0$.

49. tétel (algebra alaptétele): Tetszőleges n-edfokú polinomnak n komplex gyöke van, multiplicitással számolva.

50. tétel: Ha két legfeljebb n-edfokú polinom $n+1$ különböző helyen ugyanazt az értéket veszi fel, akkor a két polinom egyenlő.

51. tétel: Tetszőleges $P(x)$ felírható $P(x) = a_n(x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_n)$ alakban, ahol a_n a főegyütthatő és $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a polinom (komplex) gyökei.

52. tétel: $Q(x)$ akkor és csak akkor osztja $P(x)$-et, ha $Q(x)$ minden gyöke $P(x)$-nek is gyöke és nem kisebb multiplicitással.

53. tétel (*Viéte* tétele)] Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gyökei a

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

polinomnak. Ekkor teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \qquad\vdots \\ x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n = (-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

54. tétel: Ha az $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ számok teljesítik a fenti egyenletrendszert, akkor gyökei a $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ polinomnak.

55. tétel: Ha $P(x)$ valós együtthatós polinom és a nem nulla képzetes résszel rendelkező z komplex szám ennek gyöke, akkor $\overline{z}$ is gyöke $P(x)$-nek a megfelelő multiplicitással. $P(x)$ tehát osztható $(x-z)^k \cdot (x-\overline{z})^k = \left(x^2 - 2x \operatorname{Re} x + |z|^2\right)^k$-nal, ahol $\operatorname{Re} z$ a z valós része.

56. tétel: Tetszőleges valós együtthatós n-edfokú $P(x)$ polinom a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen áll elő

$$P(x) = a_n (x-x_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_m)^{k_n} \cdot (x^2 + 2b_1 x + c_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + 2b_l x + c_l)^{r_l}$$

alakban, ahol a_n a $P(x)$ főegyütthatója, $m, l \geq 0$, $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ a $P(x)$ valós gyökei a megfelelő multiplicitással, $b_1, \dots, b_l, c_1, \dots, c_l \in \mathbb{R}$ és az

$$x^2 + 2b_1 x + c_1, \ \ldots, \ x^2 + 2b_l x + c_l$$

polinomoknak nincs valós gyöke ($b_1^2 < c_1, \ \ldots, \ b_l^2 < c_l$).

57. tétel: Ha $(p;q) = 1$ és $\dfrac{p}{q}$ gyöke az $a_n x^n + \ldots + a_0$ egész együtthatós polinomnak, akkor $p \mid a_0$, $q \mid a_n$.

58. tétel: Az egész együtthatós $P(x) = x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ polinom minden valós gyöke vagy egész, vagy irracionális.

59. tétel: Ha $a, n \in \mathbb{N}$, akkor $\sqrt[n]{a}$ vagy egész, vagy irracionális.

60. tétel (*Lagrange* interpolációs formulája): Legyenek adottak a különböző $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ számok és a tetszőleges $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ számok. Ekkor egyetlen $P(x)$ polinom létezik, amely n-nél nem nagyobb fokú és teljesül rá, hogy:

$$P(b_0) = c_0, \quad P(b_1) = c_1, \quad \ldots, \quad P(b_n) = c_n.$$

Ezt a polinomot megadhatjuk az alábbi alakban:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x - b_j}{b_i - b_j}.$$

61. tétel: Legyen adva a $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ polinom, akkor $P(0) = a_0$, $P'(0) = a_1$, $P''(0) = 2a_2$, $\ldots$, $P^n(0) = n! a_n$. A polinom ekkor felírható a következő alakban:

$$P(x) = \frac{P(0)}{0!} + \frac{P'(0)}{1!} x + \frac{P''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

$*$

62. tétel (háromszög egyenlőtlenség): Tetszőleges (síkbeli) A, B, C pontokra

$$AB \leq AC + BC.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, amikor C az AB szakaszon van, illetve ha mindhárom pont egybeesik.

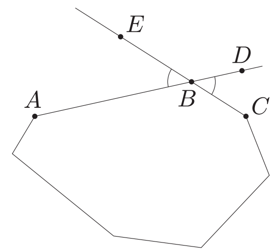
23. definíció: Egy (síkbeli) ponthalmaz *átmérőjén* a ponthalmaz két egymástól legtávolabbi pontjának a távolságát értjük. (Itt feltesszük, hogy ilyen pontpár létezik.)

24. definíció: Egy ponthalmaz *konvex,* ha tetszőleges két pontja által meghatározott szakasz benne van a ponthalmazban.

Ezentúl sokszög alatt tetszőleges (nem feltétlenül konvex) sokszöget értünk. Ha konvex sokszögekről van szó, akkor ezt jelezzük.

63. tétel: Tetszőleges n-szög ($n \geq 3$) szögeinek összege $(n-2) \cdot 180°$.

25. definíció: Legyenek A, B és C egy konvex sokszög szomszédos csúcsai, D és E egy-egy tetszőleges pont az AB és BC oldalak B felőli meghosszabbításán. Az így adódó ABE és CBD (*1. ábra*) szögeket a sokszög B-nél levő ***külső szögeinek*** nevezzük (az ABC szöget belső szögnek nevezzük).



1. ábra

64. tétel: Konvex sokszög külső szögeinek összege $360°$ (csúcsonként egy külső szöget számolva).

26. definíció: Egy M sokszöget *feldaraboltunk* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sokszögekre, ha $M = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n$, és $M_i \cap M_j = \emptyset$, ha $i \neq j$.

65. tétel: Konvex $ABCD$ négyszög köré akkor és csak akkor írható kör, ha

$$ABC\sphericalangle + CDA\sphericalangle = BAD\sphericalangle + DCB\sphericalangle = 180°.$$

66. tétel: Konvex $ABCD$ négyszögbe akkor és csak akkor írható kör, ha $AB + CD = BC + AD$.

67. tétel (*Ptolemaiosz*-tétel): Ha az $ABCD$ négyszög köré kör írható, akkor $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$. Megfordítva, ha a konvex $ABCD$ négyszögre teljesül, hogy $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$, akkor $ABCD$ húrnégyszög.

Legyen A és B egy körbe írt sokszög két szomszédos csúcsa. $\overparen{AB}$ *ívnek* általában azt az A és B végpontú körívet nevezzük, amelyen a sokszögnek nincs további csúcsa.

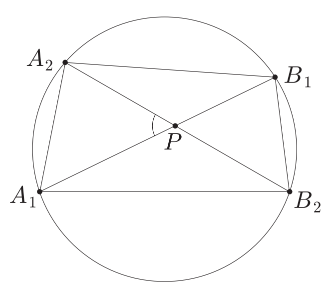
68. tétel (középponti szögek tétele): Tetszőleges $ABC\triangle$ esetén

$$ABC\sphericalangle = \frac{\overparen{AC}}{2}.$$

69. tétel: Legyen az $A_1A_2B_1B_2$, körbe írt négyszög átlóinak metszéspontja P (*2. ábra*). Igazak a következő egyenlőségek:

a) $A_1P \cdot B_1P = A_2P \cdot B_2P$ (pont hatványa körre)

b) $A_1PA_2\sphericalangle = \frac{1}{2}(\overparen{A_1A_2} + \overparen{B_1B_2})$.



2. ábra

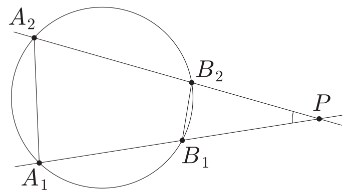
70. tétel: Legyen az $A_1B_1B_2A_2$ négyszög körbe írható (*3. ábra*). Ekkor:

1) A_1B_1 és A_2B_2 egyenesek akkor és csak akkor párhuzamosak, ha $\overparen{A_1A_2} = \overparen{B_1B_2}$;

2) egyébként A_1B_1 és A_2B_2 egyenesek egy P pontban metszik egymást, amely az A_1A_2 egyeneshez képest csak akkor van ugyanabban a félsíkban, mint B_1B_2, ha $\overparen{A_1A_2} > \overparen{B_1B_2}$ (*3. ábra*). Ebben az esetben

   a) $A_1P \cdot B_1P = A_2P \cdot B_2P$ (pont hatványa körre);

   b) $A_1PA_2\sphericalangle = \frac{1}{2}(\overparen{A_1A_2} - \overparen{B_1B_2})$.



3. ábra

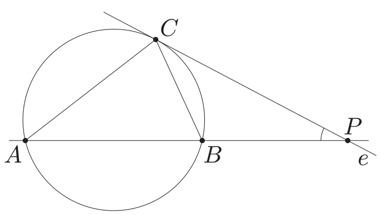
Egy P pontból egy körhöz húzott érintőszakasz hosszán a P pont távolságát értjük az érintési ponttól. A 70. tételben az érintőt a szelő határhelyzetének tekintve, megkaphatjuk a következő állítást:

71. tétel: Legyen az $ABC\triangle$ köré írt kör C-beli érintője e. Ekkor:

1) e és AB egyenesek akkor és csak akkor párhuzamosak, ha $\widehat{AC} = \widehat{BC}$;
2) egyébként e és AB egyenesek egy P pontban metszik egymást, amely az AC egyeneshez képest akkor és csak akkor van a B ponttal azonos félsíkban, ha $\widehat{AC} > \widehat{BC}$ (*4. ábra*). Ebben az esetben igazak a következő állítások:

   a) $AP \cdot BP = CP^2$ (pont hatványa körre);

   b) $APC\sphericalangle = \dfrac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{AC})$.



4. ábra

A 68., 69.b., 70.2.b., 71.2.b. tételekből következik az alábbi állítás:

72. tétel: Legyen adott egy AB szakasz és legyen M egy olyan félsík, amelyet az AB egyenes határol. Ha $0° < \varphi < 180°$, akkor azon P pontok mértani helye az M félsíkban, amelyekre $APB\sphericalangle = \varphi$, egy A és B végpontú körív. Ha egy $Q \in M$ pont a köríven belül helyezkedik el, akkor $AQB\sphericalangle > \varphi$, ha kívül, akkor $AQB\sphericalangle < \varphi$.

73. tétel: Legyen egy ABC háromszögben a, b, c az oldalak hossza, α, β, γ a velük szemközti szögek nagysága, s a félkerület, r a beírható kör sugara, R a köré írható kör sugara, h_a az a-hoz tartozó magasság, r_a az a oldalt érintő hozzáírt kör sugara. Ekkor a háromszög T területe:

a) $T = \dfrac{a \cdot h_a}{2}$

b) $T = \dfrac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha$

c) $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
(Héron-képlet)

d) $T = \dfrac{abc}{4R}$

e) $T = s \cdot r$

f) $T = \dfrac{1}{2} r_a (b + c - a)$

g) $T = \dfrac{1}{2} R^2 (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$

Az e) képlet érvényes bármely r sugarú kör köré írt s félkerületű sokszögre.

74. tétel: Ha egy derékszögű háromszög befogói a és b, az átfogója c, a beírt kör sugara r, a köré írt kör sugara R, akkor $r = \frac{1}{2}(a+b-c)$; $R = \frac{c}{2}$.

75. tétel: Ha az $ABC\triangle$ belső szögfelezője AL, ahol L a BC oldal pontja, akkor

$$\frac{BL}{CL} = \frac{AB}{AC}.$$

76. tétel (paralelogramma egyenlőség): Tetszőleges $ABCD$ paralelogrammára igaz:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2.$$

Kiegészítés: A tétel megfordítása is igaz.

77. tétel: Tetszőleges P pontra és tetszőleges $ABCD$ téglalapra

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2.$$

*

78. tétel: Ha A_1B_1 egy AB szakasz merőleges vetülete egy egyenesre, amely az AB egyenest $\varphi \le 90°$ szögben metszi, akkor $A_1B_1 = \cos\varphi \cdot AB$.

79. tétel: Legyen $\mathbf{a}$ nem nullvektor a síkon, O pedig ennek a síknak egy pontja. Tetszőleges $k \in \mathbb{R}$ esetén azon X pontok mértani helye, amelyekre az $\mathbf{a} \cdot \overrightarrow{OX} = k$ egyenlet teljesül, egy egyenes.

80. tétel: Tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ponthalmazra és tetszőleges $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ számokra, amelyek összege nem nulla, egyetlen olyan O pont létezik, amelyre

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \overrightarrow{OA_i} = 0.$$

Ez esetben a tér tetszőleges P pontjára teljesül, hogy

$$\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) \cdot \overrightarrow{PO} = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \overrightarrow{PA_i}.$$

Ezen a tételen múlik a következő három definíció:

27. definíció: Egy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontrendszer *súlypontjának* azt az O pontot nevezzük, amelyre

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} = \mathbf{0}.$$

28. definíció: Az $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ szakaszrendszer *súlypontjának* azt az O pontot nevezzük, amelyre

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \cdot \overrightarrow{OM_i} = \mathbf{0},$$

ahol l_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ az i-edik szakasz hossza, M_i pedig az i-edik szakasz középpontja.

29. definíció: Az $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots, A_nB_nC_n$ háromszög-rendszer *súlypontjának* azt az O pontot nevezzük, amelyre

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \overrightarrow{OM_i} = 0,$$

ahol t_i az i-edik háromszög területe, M_i pedig a súlypontja.

81. tétel: Ha M az $ABC\triangle$ súlypontja, akkor a tér tetszőleges P pontjára teljesül:

$$\overrightarrow{PM} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3}.$$

A háromoldalú szöglet lapszögeire teljesül a háromszög-egyenlőtlenség következő általánosítása:

82. tétel: Tetszőleges háromoldalú szöglet φ, ψ, χ lapszögeire $\varphi < \psi + \chi$.

83. tétel: Tetszőleges konvex szöglet lapszögeinek összege kisebb $360°$-nál.

84. tétel: Menjen át az A ponton három, nem egysíkú egyenes. Legyen B_1 és B_2 két, A-tól különböző pont az egyik egyenesen, C_1, C_2 a másikon, és D_1, D_2 a harmadikon. Az így adódó $AB_1C_1D_1$ tetraéder V_1 és az $AB_2C_2D_2$ tetraéder V_2 térfogatának aránya:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\overline{AB_1} \cdot \overline{AC_1} \cdot \overline{AD_1}}{\overline{AB_2} \cdot \overline{AC_2} \cdot \overline{AD_2}}.$$

85. tétel: Legyen t_1 és t_2 egy tetraéder két lapjának területe, φ ezen lapok síkjának a szöge, p ezen két lap közös élének a hossza, q a szemközti él hossza, d ezen élek távolsága és ψ ezen élek által bezárt szög. A tetraéder V térfogata:

$$V = \frac{2 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot \sin\varphi}{3p} = \frac{1}{6} pqd \sin\psi.$$

Ha az $ABCD$ tetraéderben az AB, BC, CD, DA élek felezőpontjai rendre E, F, G, H, az $EFGH$ paralelogramma területe t, az AC és BD élek távolsága d, akkor $V = \frac{2}{3} t \cdot d$.

86. tétel: Egy gúla V térfogata $V = \frac{1}{3} h \cdot t_0$, ahol t_0 az alaplap területe, h a magassága. Ha létezik olyan „hozzáírt" gömb, amely kívülről érinti az alaplapot és az oldallapok síkját, akkor a gúla térfogata $V = \frac{1}{3} r_0(P - t_0)$, ahol r_0 a gömb sugara, P pedig a gúla palástjának a felszíne, tehát az oldallapok területének az összege.

87. tétel: r sugarú gömb köré írt poliéder térfogata $V = \frac{1}{3} r \cdot S$, ahol S a poliéder felszíne.

88. tétel: Ha az α és β síkok által bezárt szög φ, és az α síkon van egy S területű síkidom, akkor ennek merőleges vetülete a β síkra $S \cdot \cos\varphi$ területű.

89. tétel: Legyen $\mathbf{a}$ egy nem nullvektor a térben, O pedig tetszőleges pont. Így tetszőleges $k \in \mathbb{R}$ esetén a tér azon X pontjainak mértani helye, amelyekre $\mathbf{a} \cdot \overrightarrow{OX} = k$, egy sík.

90. tétel: Az $ABCD$ tetraéder szemközti élfelező pontjait összekötő három szakasz egymást felezve metszi egy M pontban, amelyre tetszőleges P pont esetén

$$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$$

(M a tetraéder súlypontja).

91. tétel (Euler-féle formula): Legyen egy konvex poliéder csúcsainak száma c, éleinek száma e, lapjainak száma l. Ekkor $l - e + c = 2$.

*

30. definíció: Egy *gráfot* megadunk, ha először is egy $V = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$ halmazt megadunk, amelynek elemeit a gráf csúcsainak nevezzük, másodszor pedig a V halmaz elemei közül tetszőleges módon párokat választunk, amelyeket a gráf éleinek nevezünk. Egy gráf *irányított,* ha az éleit a csúcsok rendezett párjai alkotják.

Nem irányított gráfra példa egy olyan gráf, amelynek csúcsait emberek egy csoportjának a tagjai alkotják, éleit pedig azok a párok, amelyek tagjai ismerik egymást. Itt természetes föltevés, hogy az ismeretségek kölcsönösek, vagyis ha a ismeri b-t, akkor b is ismeri a-t.

Ha gráfokkal dolgozunk, kényelmes a geometriai modellt használni: a gráf minden csúcsához egy pontot rendelünk a síkban vagy a térben, az éleihez pedig egy szakaszt vagy görbét, amely a megfelelő pontokat köti össze (irányított gráf esetén ezeken a vonalakon az irányt is megjelöljük).

31. definíció: $k \geq 2$ *hosszúságú körnek* a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsú gráfban a

$$(v_{i_1}; v_{i_2}), (v_{i_2}; v_{i_3}), \ldots, (v_{i_{k-1}}; v_{i_k}), (v_{i_k}; v_{i_1})$$

alakú különböző élekből álló sorozatot nevezzük.

92. tétel: Egy n csúcsú, n élű gráfban létezik kör.

$*$

93. tétel: n különböző elemből álló sorozat permutációinak száma $n!$.

94. tétel: Egy n elemű halmaz m elemű részhalmazainak száma $\binom{n}{m}$ $(0 \le m \le n)$.

A 17.a. és a 94. tételekből következik:

95. tétel: Egy n elemű halmaz összes részhalmazainak száma 2^n.

$*$

32. definíció: Végezzünk el egy kísérletet, amelynek során véletlenszerűen kiválasztunk az $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ halmazból egy elemet. Tekintsük azt az eseményt, hogy a kiválasztott elem a $B \subset A$ pontosan m elemű részhalmaznak is eleme. Ennek az eseménynek a *valószínűsége* $\mathrm{P}(B) = \dfrac{m}{n}$.

A pénzfeldobás eredménye például egy elem kiválasztása az $A = \{\text{fej}, \text{írás}\}$ halmazból, amelyben így a „fej” valószínűsége $\dfrac{1}{2}$. Más példa lehet egy golyó kihúzása egy urnából, ponthármas kiválasztása adott pontok által meghatározott ponthármasok halmazából, egy halmaz elemeinek permutációja (pontosabban egy permutáció kiválasztása a permutációk halmazából) stb.

96. tétel: Tetszőleges B esemény valószínűségére $0 \le \mathrm{P}(B) \le 1$. Annak a valószínűsége, hogy B nem teljesül, $1 - \mathrm{P}(B)$. Ha B és C esemény nem történhet meg egyszerre, akkor annak a valószínűsége, hogy egyikük bekövetkezik, $\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C)$. A B és C események függetlenek, ha $\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(C)$ annak a valószínűsége, hogy mindkettő bekövetkezik.

A 32. definícióban leírt kísérlethez egy $X\colon A \to \mathbb{R}$ függvényt rendelhetünk, amelynek értéke attól függ, hogy az A halmaz mely elemét választottuk ki a kísérlet során. Az ilyen függvényt valószínűségi változónak, az $X(a_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ értékek számtani közepét a változó várható értékének nevezzük. Ha például egy érmét k-szor feldobunk, akkor a „fej” dobások száma ilyen függvény, amely a $0, 1, \ldots, k$ értékek valamelyikét veszi fel a dobások eredményétől függően.

33. definíció: Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó egy véges $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ számhalmaz elemeit veszi fel, rendre $p_1, p_2, \ldots, p_n$ valószínűségekkel. Az X *várható értékének* az

$$\mathrm{M}(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k$$

számot nevezzük.

34. definíció: Tegyük fel, hogy X az $x_1, x_2, \ldots$ végtelen halmaz elemeit veheti fel $p_1, p_2, \ldots$ valószínűségekkel. X *várható értéke*

$$\mathrm{M}(X) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} p_k x_k,$$

ha ez a határérték létezik.

97. tétel: Valószínűségi változók összegének várható értéke egyenlő a tagok várható értékének az összegével:

$$\mathrm{M}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{M}(X_i).$$

Megvizsgálható, hogy az X valószínűségi változó milyen értéket vesz fel és milyen valószínűséggel, ha tudjuk, hogy egy adott B esemény bekövetkezett. Ezzel egy új valószínűségi változót kapunk, amelyet X_B-vel jelölünk.

98. tétel: Tegyük fel, hogy B és C események nem következhetnek be egyszerre, de a kettő közül valamelyik mindenképpen bekövetkezik. Így tetszőleges X valószínűségi változóra

$$\mathrm{M}(X) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{M}(X_B) + \mathrm{P}(C) \cdot \mathrm{M}(X_C).$$