Az érettségi-felvételi feladatok és vizsgák sajátos helyet foglalnak el a matematikán, de még az iskolai matematikán belül is. A feladatok összeállítói igyekeznek minden eshetőségre gondolva világosan és egyértelműen fogalmazni. A jelöltek a tanultak alapján értelmezik a feladatok szövegét és öntik formába a megoldásaikat. A javítók végül gondosan kidolgozott részletes útmutató alapján végzik a munkájukat.

A legjobb szándékok ellenére is olykor homokszemek kerülnek ennek a gépezetnek a fogaskerekei közé. Nem lehet minden helyzetre kiterjedő szabályzatot készíteni, olykor rögtönözni kell, amikor is a tudáson túl a tapasztalat, a konvenciók, a szokások és az íratlan szabályok segítenek.

Ezeket a kérdéseket járja körül *Kántor Sándor,* aki sok év tapasztalatával a háta mögött fejti ki gondolatait. Véleményét ne tekintsék hivatalos álláspontnak és a KöMaL szerkesztői sem feltétlenül gondolkodnak így. Ő így látja ezt a kérdéskört és a leírtakat tartja a legfontosabbnak. Gondolatébresztő cikkét vitaindítónak is szánjuk és a hozzászólásokat alkalomadtán szívesen közöljük.

*

Több, mint három évtizede közös a felvételi és az érettségi írásbeli matematika vizsga. Ennek feladatsorai – és különösen a hozzájuk tartozó javítási útmutatók (a hivatalos megoldások) – sok problémát hoztak felszínre a matematika középiskolai oktatásában.

A problémák egyik része a feladatszöveg értelmezésével, és ebből adódóan a megoldás helyességének elbírálásával kapcsolatos.

Közhelynek tűnik, mégis hangsúlyozni kell, hogy egy feladatot csak akkor tudunk megoldani, ha pontosan tudjuk, hogy mi a feladat. Éppen ezért részletesen kell foglalkoznunk a feladatszövegek elemzésével.

A feladat szövegének a köznapi nyelv szerinti értelmezése gyakran eltér attól, amit a feladat ténylegesen megkíván.

Talán a legnagyobb eltérés a matematikai és a köznapi értelmezés között a „szerkessze meg ...” típusú szöveg esetén van. Ez ugyan nemigen fordul elő felvételi feladatokban, de a középiskolai gyakorlatban igen, ezért ott jól el lehet magyarázni az ilyen feladatokon keresztül a szövegelemzés fontosságát és problémáit. Ilyen szöveg ugyanis egyáltalán nem kívánja meg a körzővel-vonalzóval való tényleges szerkesztést, de le kell írni a szerkesztés menetét, be kell bizonyítani, hogy az valóban a keresett alakzatot adja, és diszkussziót is kell (talán) végezni.

Másik példaként vehetjük, hogy a matematikai feladatok szövege nagyon sok esetben csak értelemszerű kiegészítésekkel együtt használható.

Ez a kiegészítés természetesen csak akkor gond, ha a feladat kitűzői, a megoldó diákok, a javító tanárok más és más módon egészítik ki a szöveget. A felvételi feladatok és megoldások tipikus problémája ez, mert ott éppen ezek a személyek (kitűző, megoldó, javító) nem cserélték ki elgondolásaikat a lehetséges kiegészítési változatokról. Ugyanakkor minden kis részlet pontot ér, az íratlan szabályok, konvenciók alkalmazása különböző értelmezésekhez vezethet, ha nem is feltétlenül a feladat egészét illetően, de a részletekben igen gyakran.

Nem szerencsés egy feladat szövegezése, ha lényegesen ki kell egészíteni. Csak nemrégen, 2003-ban, a próbafelvételi példák között is volt ilyen, mindjárt két vonatkozásban is. Nők száma és szülések száma alapján a született gyerekek számát kellett megadni. A példaszövegből kimaradt az az egyáltalán nem nyilvánvaló kiegészítés, hogy ikerszülésektől tekintsenek el, és azt is tételezzék fel, hogy egy nő egy évben nem szül egynél többször.

Harmadik problémaként szólunk arról, hogy a feladat szövegében mindig vannak nyílt és rejtett információk a megoldáshoz.

A nyílt információk torzításmentes átvétele és a rejtett információk felismerése érdekében a megoldás során célszerű többször visszatérni a feladat szövegéhez.

A konkrét témakörökben részletesen megvizsgáljuk a témakörre jellemző feladatszövegeket.

A szövegértelmezési problémák elemzésére azért is szükség van, mert a felkészítő tanár idő és tapasztalat hiányában a problémák matematikai vonatkozásainak elemzése helyett receptet próbál adni a diáknak. Ha megkérdezzük a diákot, hogy miért úgy csinálja, amit csinál, akkor matematikai magyarázat helyett azt válaszolja, hogy „így szoktuk csinálni”.

A problémák másik része abból származik, hogy a feladat témája szokatlan, vagy a megoldás módszere, logikája eltér a középiskolában szokásostól.

Az ilyen problémák megoldásához a felvételire készülő diáknak ismerni kell a pontos definíciót, és sok *módszert.*

Különösen a módszerek jelentőségét hangsúlyozom. Ezek utalnak a megoldások logikai szerkezetére, lényeges részeire. Minden megoldásnak van két-három lényeges mozzanata, ezeken nyugszik a megoldás. Ha ezt világosan kiemeli a megoldó, akkor a részletek jelenősége eltörpül, a javító látja, hogy a megoldó uralja az anyagot, tudja a matematikát.

Ebben a cikkben a leginkább vitatott anyagrészekből hozok példákat azokra az ismeretekre (módszerekre és elvárásokra), amelyek segíthetnek diáknak és tanárnak, akármilyen konvenció szerint készül is a hivatalos feladatmegoldás, és akkor is, ha szokatlan a feladat.

Leírok olyan matematikai elemzéseket, amelyek alapján nemcsak meg lehet oldani a feladatot, hanem meg is lehet indokolni a feladat megoldásának helyességét, az egyes recepteket is. Ezeket az ismereteket anyagrészek szerint, felvételi feladatokhoz kötve tárgyalom, a feladat kitűzésének évszámát is feltüntetve. Az elemzés során nem a diákok dolgozataiból, hanem a hivatalos megoldásokból idézek olyan részleteket, amelyek a tisztázatlan konvenciók, a különböző elépzelések miatt szinte hibának minősülnek.

Ezekről a problémákról részletesebben és alaposabban, minden anyagrészt érintve és több példát felhozva egy kis könyvet írtam *Módszerek és elvárások a matematika érettségi-felvételi feladatok megoldásához* címen.

Függvények: értelmezési tartomány, értékkészlet, szélsőérték

1. feladat (1992). *Állapítsa meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi kifejezések értelmezhetők! Adja meg a kifejezések legnagyobb és legkisebb értékét!*

$$a)\quad \log_2 0{,}5^{\sin x} \qquad b)\quad \sqrt{1-\sin^2 x} \qquad c)\quad (\log_2 0{,}5^{\sin x})\big(\sqrt{1-\sin^2 x}\,\big).$$

Megoldás.

a)

$$\log_2 0{,}5^{\sin x} = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} = \log_2 2^{-\sin x} = -\sin x,$$

ezért minden valós x-re értelmezhető a kifejezés ($D_f = \mathbb{R}$), legnagyobb értéke 1, legkisebb értéke -1.

b)

$$\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|,$$

ezért minden valós x-re értelmezhető a kifejezés ($D_f = \mathbb{R}$), legnagyobb értéke 1, legkisebb értéke 0.

c)

$$(\log_2 0{,}5^{\sin x})\big(\sqrt{1-\sin^2 x}\,\big) = -\sin x|\cos x|,$$

ezért minden valós x-re értelmezhető a kifejezés ($D_f = \mathbb{R}$).

A függvény alakja $\cos x \geq 0$ esetén $-\frac{1}{2}\sin 2x$, $\cos x < 0$ esetén $\frac{1}{2}\sin 2x$, tehát értéke legfeljebb $\frac{1}{2}$ és legalább $-\frac{1}{2}$. Mivel ezeket az értékeket fel is veszi (pl. $-\frac{\pi}{4}$-nél, illetve $\frac{\pi}{4}$-nél), ezért minimuma $-\frac{1}{2}$ és maximuma $\frac{1}{2}$.

Megjegyzések. 1. Nem szőrszálhasogatás, de sok hasonló feladatban kiírják, hogy a három függvényt külön-külön kell vizsgálni.

2. A hivatalos megoldásban az *a)* és a *b)* részhez még azt is hozzáfűzték, hogy „és ezeket (t.i. a legnagyobb és a legkisebb értéket) fel is veszi”. Emlékeztetünk a maximum és a minimum definíciójára, amelyből nyilvánvaló, hogy ez a kiegészítés felesleges. Ha tudjuk, hogy van szélsőérték, akkor azt fel is veszi a függvény, mert a szélsőérték mindig függvényérték.

Félő viszont, hogy ilyen szöveg után még a tanár is elbizonytalanodik. A dolgozatjavításkor a kiegészítés hiányában pontot von le, a felkészítéskor pedig azt mondja, hogy „a biztonság kedvéért írjuk oda.”

3. Itt szólunk részletesen az értelmezési tartomány vizsgálatának problémáiról. Tiltással is és igenléssel is fogalmazhatunk számos, az értelmezési tartományra vonatkozó korlátozást, például:

– négyzetgyök alatti kifejezés nem lehet negatív,
  – nagyobb vagy egyenlő nullánál;

– logaritmálandó mennyiség nem lehet negatív vagy nulla,
  – pozitívnak kell lennie;

– logaritmus alapja nem lehet sem negatív, sem nulla, sem 1,
  – pozitívnak és 1-től különbözőnek kell lennie.

A legtöbb ilyen feladatban egy függvény értelmezési tartományát, tehát egy halmazt kell megadni (megállapítani, meghatározni). A hivatalos megoldás sokszor beéri annyival, hogy a komplementerhalmazt adja meg, tehát azt, hogy mi nem eleme a halmaznak.

Azt ajánlom, hogy ha egy halmaz megadását kéri a feladat, akkor a kérdéshez igazodva válaszoljunk, és bátran használjuk a halmazok megadásának ismert, bár a középiskolában ritkán alkalmazott jelölésrendszerét.

2. feladat (1999). *Határozza meg a $4x-3y+8z$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét, ha az x, y, z olyan nemnegatív valós számok, amelyekre teljesülnek az alábbi egyenlőségek:*

$$4x+y+4z=3 \quad \text{és} \quad 3x+6y-4z=4.$$

Megoldás. A két egyenlőségből összeadással $7x + 7y = 7$, ebből $y = 1 - x$ adódik.

Ezt az első egyenletbe írva és rendezve: $z = \dfrac{2-3x}{4}$.

Ezek felhasználásával a vizsgált kifejezés értéke: $4x - 3y + 8z = x + 1$.

Mivel $0 \le x$ és $0 \le z$, ezért szükséges, hogy $0 \le x \le \dfrac{2}{3}$ legyen. Ezekre az x értékekre $y = 1 - x \ge 0$ is teljesül, tehát ezekre az értékekre kell megnézni a kifejezésnek, az $x + 1$-nek, a legkisebb és a legnagyobb értékét.

Az pedig már nyilvánvaló, hogy ennek a kifejezésnek legkisebb értéke 1, legnagyobb értéke $\dfrac{5}{3}$. (Nem kérdezték, de megadhatjuk, hogy az előbbit akkor veszi föl, ha $x = 0$, $y = 1$, $z = \dfrac{1}{2}$, utóbbit pedig akkor, ha $x = \dfrac{2}{3}$, $y = \dfrac{1}{3}$, $z = 0$.)

Megjegyzés. Vigyázni kell arra, hogy ne tévesszük össze a korlátot és a szélsőértéket, amint azt a hivatalos megoldás és egyes könyvek megtették.

Algebrai egyenletek és egyenletrendszerek

Ez a témakör annyira vitatott, hogy sok dolgot már a feladatok megoldása előtt megtárgyalunk. Emlékeztetünk két nagyon lényeges fogalom definíciójára.

Két egyenlet ekvivalens, ha értelmezési tartományaik is és gyökeik is megegyeznek.

Egy egyenletnek következménye egy másik egyenlet, ha az első egyenlet értelmezési tartományának minden eleme a második egyenlet értelmezési tartományának is eleme, és az első egyenlet minden gyöke a második egyenletnek is gyöke. Röviden: *következményesek.*

Évtizedek óta nem tisztázódott, hogy mit jelent az „Oldja meg (a valós számok halmazán) az alábbi egyenletet!” szöveg, hogy mit tekintenek kifogástalan megoldásnak, hogy mik az elvárások a megoldással szemben. A felvételi feladatok hivatalos megoldásaiból kiderült, hogy gyakran változtatják a fenti szöveg jelentését. Előfordult már, hogy egy példasoron belül(!) két feladatnál különböző volt az értelmezés. A különböző szövegértelmezésekből különböző elvárások adódnak a megoldásokra.

Felszínesen nézve azt látjuk, hogy a hivatalos megoldásokban

– a kikötések (az értelmezési tartomány vizsgálata) hol szerepel, hol nem,

– a valamilyen módon kapott, gyökjelölt számról egyszer ellenőrzik, máskor nem ellenőrzik, hogy kielégíti-e az egyenletet,

– ha ellenőriznek, akkor egyszer behelyettesítéssel teszik ezt, máskor a kikötésekkel való összehasonlítással, néha mindkettőt elvégzik.

– „rendezéssel kapjuk”, „átalakítással kapjuk” vagy még rövidebben: „ebből” szavak, szócsoportok (továbbiakban: töltelékszavak) szerepelnek az egymás alá írt egyenletek között.

Hamar kiderül, hogy a felszín alatt két probléma húzódik meg. Egyrészt nincs pontosítva, tisztázva, hogy mi a feladat, másrészt nem lehet tudni, hogy mit is jelentenek a töltelékszavak az egymás alá írt egyenletek közötti kapcsolat – természtesen az érdemi, a gyökeik közötti kapcsolat – vonatkozásában. Tehát pontosítani kell a feladatszöveg értelmét és az egymás alá írt egyenletek kapcsolatát! A továbbiakban nem írom ki, hogy a valós számok halmazán keressük az egyenlet megoldását, mert azt tudtommal mindenki elfogadja (minden diák tudja), hogy ha nincs kiírva a számfajta, akkor a valós szám értendő oda.

Azzal mindenki egyetért, hogy az „Oldja meg az alábbi egyenletet!” szöveg esetén a feladat mindenképpen megkívánja a következőt:

(∗) „Adja meg azt a számhalmazt, amelynek elemei kielégítik az egyenletet (a többszörös gyökök megjelölésével), és bizonyítsa is be, hogy pontosan ezek elégítik ki (ezek kielégítik, de mások nem).”

Mielőtt megnézzük, hogy ez mit is jelent, nézzük meg a lehetséges válaszokat és azok következményeit. Tegyük fel, hogy egy dolgozatban a diákszokásnak megfelelően a sokszor látott átalakításokat (szorzások számmal vagy változóval, rendezés stb.) végezve egymás alá írt egyenletek vannak. Az utolsó egyenlet az, hogy x egyenlő egy számmal. Mit állíthatunk ennek alapján? Azt hiszem, hogy minden tanár (és diák) egyetért velem abban, hogy ezzel az egyenletsorral a feladatmegoldó a következőt akarta mondani.

„Ha van olyan x (valós szám), ami a kiindulási egyenletet kielégíti, akkor ez a szám az utána következőt is, az utána következőt is stb. kielégíti.”

Ennyinek a bizonyítását a töltelékszavak nélkül is elfogadjuk. Ám a töltelékszavak szerepeltetése sem jelent ennél többet. Különben értelmezni, elemezni kellene ezeket, és mindenkivel el kellene fogadtatni az értelmezést, valahogy így: az „átalakítással kapjuk” szöveg azt jelenti, hogy itt olyan átalakításról van szó, amely ekvivalens egyenletet eredményez. Nem vitatom, hogy néha kifejezetten hasznos ekvivalenseknek tudni az egymás alá írt egyenleteket, de az ekvivalenciával bánni nagy figyelmet igényel, és sokkal nehezebb, mint a következményességre ügyelni. Nagyon jól illusztrálja ezt a 2000. évi egyik felvételi feladat hivatalos megoldása, ezt később szó szerint idézem és elemzem.

Célszerű tehát az egymás alá írt egyenleteket következményeseknek tekinteni, hacsak kifejezetten mást nem írt a feladatmegoldó a két egyenlet gyökeinek kapcsolatáról, pl. ekvivalenseknek állította az egyenleteket. Egymás alá írt, következményeseknek tekintett egyenletek esetében viszont még nyilván nincs bebizonyítva az, hogy az utolsó, „x egyenlő egy számmal" egyenlet a gyököt adta meg. Annyit állíthatunk csupán, hogy más szám nem lehet az egyenlet gyöke. Nyilvánvaló, hogy a behelyettesítéssel végzett ellenőrzés egyszerűen és biztosan eldönti, hogy gyök-e ez a szám, vagy nem. Ha a behelyettesítés (művelet) el sem végezhető, mert nincs értelme, akkor nyilván nem áll fenn egyenlőség. Az esetleg rendelkezésre álló értelmezési tartománnyal való összehasonlítás csak akkor dönti el ezt a kérdést, ha a szám nincs benne az értelmezési tartományban. Ha a szám eleme az értelmezési tartománynak, akkor még nem biztos, hogy gyök is.

Itt, az ellenőrzés kérdésének tárgyalásakor térek ki a hivatalos megoldások szövegében is igen gyakran megtalálható nyelvi hibára. Sokszor az egyenletmegoldás utolsó mondata az, hogy „az eredeti egyenlet megoldása x_1, és ez kielégíti az egyenletet". Ha már tudjuk, hogy mi a megoldás, akkor miért ellenőrizzük? Fordítva kellene írni: „x_1 kielégíti az eredeti egyenletet, tehát ez a megoldás".

Tehát megállapítottuk, hogy a kiindulási egyenletből következményes egyenletekkel megkapott, gyökként szóba jövő számokat a kiindulási egyenletbe való behelyettesítésükkel ellenőrizve *tökéletesen* eleget tettünk a feladat ($*$)-gal jelölt követelményeinek. Ezért, ha csak annyi a feladat, amennyi ($*$)-ban le van írva, akkor nem kell az értelmezési tartományt megadni! Ha valaki azzal az indokkal kérné az értelmezési tartomány megadását, hogy csak úgy van értelme a feladatnak, attól megkérdezném, hogy kinek kell gondoskodnia arról, hogy értelmes feladat legyen kitűzve? Ezt talán mégse a feladat megoldójától kellene elvárni. Ha erre azt mondják, hogy megállapodás szerint, ha a feladat kitűzője nem adta meg az értelmezési tartományt, akkor a szóba jövő legbővebb valós számokból álló halmazt kell értelmezési tartománynak tekinteni, akkor a feladat megoldója is élhet ezzel a lehetőséggel: neki sem kell megadni az értelmezési tartományt, mert az megállapodás szerint a legbővebb szóbajövő halmaz. Ha valaki azt szeretné, hogy ezentúl mindig, akármilyen módszerrel dolgozott is a megoldó, szerepeljen a megoldásban az értelmezési tartomány megadása is, akkor érje el, hogy minden feladat szövegében szerepeljen ez az igény. Vagy érje el, hogy mindenki hallgatólagosan, pluszfeladatként úgy értelmezze az „Oldja meg az alábbi egyenletet!" szöveget, hogy mindenképpen meg kell határozni az értelmezési tartományt is.

A jelenlegi helyzetben, tehát amikor nincs általánosan elfogadott konvenció e kérdésben, önvédelemből a diákok dolgozhatnak a bővebb feladatértelmezés szerint. Ha ezek után bárki azt gondolná, hogy én a ($*$) értelmezés helyett az értelmezési tartomány meghatározásával kibővített értelmezésnek vagyok a híve, az nagyon téved! Csak jobb híján ajánlom ezt a diákoknak. De most mutatok három példát arra, hogy ez a bővített változat milyen további problémákat vet fel.

Az egyik probléma forrása az, hogy nincs tisztázva (nincs általánosan elfogadott konvenció) az értelmezési tartomány megadásának formájára. Az implicit forma is jó, vagy explicit forma fogadható csak el? Ha nem szükséges az explicit forma, akkor szélsőséges értelmezés szerint semmit sem kell csinálni, mert maga az egyenlet is az értelmezési tartomány megadásának implicit formája. Ha viszont explicit formát kell megadni, akkor van olyan egyenlet, amelyet nem tudunk megoldani, pedig a megoldás ($*$) értelmezése esetén nagyon könnyen megoldanám. Nézzünk egy ilyen példát!

Oldja meg az alábbi egyenletet!

$$x+\sqrt{x^5-4x^2+x+1}=3+\sqrt{x^5-4x^2+x+1}.$$

A ($*$) értelmezés esetén a megoldás egyik lehetséges változata az, hogy ha van az egyenletet kielégítő x szám, az csak az $x=3$ lehet, és ez megoldás is $3^5-4\cdot 3^2+3+1\geq 0$ miatt. Ha viszont a bővített értelmezés mellett kell megoldani a feladatot, és az értelmezési tartományt explicit módon kell megadni, akkor ötödfokú egyenlőtlenséget kellene megoldani, amit nyilván senki sem gondol komolyan.

A másik probléma forrása az, hogy nem szokták megadni az értelmezési tartományt (a hivatalos megoldásban) olyan esetekben, amikor az $\mathbb{R}$-rel egyenlő. Előfordul, hogy egyáltalán nem triviális a dolog. Egy felvételi feladatban $\sqrt{x^2-4x+4}$ szerepelt egy egyenletben. Bár ez tényleg minden valós x-re értelmezett, de ha erről nem ír semmit a megoldó, akkor jó lenne tudni, hogy

– nem akarta vizsgálni,

– nem tudta vizsgálni,

– fejben elvégezte a vizsgálatot?

A harmadik probléma az alábbi (szintén felvételi) feladat során jött elő.

Oldja meg a

$$\sqrt{x-4p+16}=2\sqrt{x-2p+4}-\sqrt{x}$$

egyenletet, ahol p valós paramétert jelent. A p mely értékeire van valós megoldás?

Ha fel is írjuk, hogy

$$x \geq 4p - 16, \quad x \geq 2p - 4, \quad x \geq 0,$$

ennek gyakorlatilag semmi információtartalma nincs. Ahogy mondani szokták, az ördögnek (ezúttal a dolgozatjavítónak) tartozunk vele.

Sem a hivatalos megoldásban, sem a feldolgozó könyvekben nem láttam tárgyalva (nem értem az elmaradásának az okát), hogy a p paramétertől függően az egyenlet értelmezési tartománya

$$\begin{array}{lll} \text{ha} & p \leq 2, & \text{akkor} \;\; 0 \leq x, \\ \text{ha} & 2 \leq p \leq 4, & \text{akkor} \;\; 2p - 4 \leq x, \\ \text{ha} & 4 \leq p, & \text{akkor} \;\; 4p - 16 \leq x. \end{array}$$

A példák után foglaljuk össze az elvárásokat!

• Ha a feladatban az „oldjuk meg az alábbi egyenletet” szerepel, akkor adja meg azt a számhalmazt, amelynek elemei kielégítik az egyenletet (a többszörös gyökök megjelölésével), és bizonyítsa is be, hogy pontosan ezek elégítik ki (ezek kielégítik, de mások nem).

• Ha nem adja meg a feladat szövege az egyenlet értelmezési tartományát, akkor tekintsük a feladat részének az értelmezési tartomány megadását is, függetlenül attól, hogy ez része-e a gyök meghatározásának, vagy nem része. Legfeljebb akkor mellőzhetjük az értelmezési tartomány megadását, ha nincsenek olyan függvények, amelyeknél korlátozások szoktak lenni, illetve ha az egyenletnek nincs megoldása: a $\sqrt{x^2 - 3x - 7} = -2$ egyenletben érdektelen, milyen számok helyettesíthetők be.

• Egymás alá írt egyenletek következményeseknek számítanak. Ha mást szeretne állítani az egyenletek kapcsolatáról (pl. ekvivalensek), akkor azt ki kell írni.

• A behelyettesítéssel biztosan meg lehet győződni arról, hogy egy szám gyök-e vagy nem.

• A behelyettesítés gyakran annyira egyszerű, hogy fejben is elvégezhető. Valamilyen módon jelezni kell a megoldásban, hogy azt tényleg elvégeztük. Csak ezután mondhatjuk ki a gyökjelölt számról, hogy valóban gyök. Vigyázzunk a logikai sorrendre.

• Ha ekvivalens egyenletek útján kaptuk meg a gyökjelölt számot, akkor ez valóban gyök is. Az egyenletek ekvivalenciáját nem könnyű belátni akkor, ha az értelmezési tartomány nem az összes valós szám.

• Szöveges egyenlet megoldásában (nyilván az elején) néhány mennyiségre valamilyen jelölést alkalmazunk. Feltétlenül írjuk le, hogy mit és hogyan jelöltünk.

• Szöveges egyenlet megoldásában ügyeljünk arra, hogy a felállított egyenlet ekvivalens-e a feladat szövegével, vagy – ami gyakrabban előfordul – csak következményes. Ettől függ ugyanis az, hogy az ellenőrzésnél hova kell visszahelyettesíteni.

• Végül itt említjük meg, hogy másodfokú egyenlet gyökeinek számáról többféle megfogalmazás van forgalomban: ha a diszkrimináns 0, akkor mondják, hogy egy gyök van, de azt is, hogy két egyenlő gyök van. Mindkét megfogalmazás helyes, a körülményektől függ, melyiket érdemes hangsúlyozni.

3. feladat (1995). *Mely valós x számok elégítik ki a következő egyenletet:*

$$\frac{x}{3x-1} - \frac{3x^2-1}{9x^2-1} = \frac{x+1}{3x+1}.$$

Megoldás. Az egyenlet megoldása gyöke annak az egyenletnek is, amelyik ebből mindkét oldalnak $9x^2 - 1$-gyel való megszorzásával áll elő:

$$x(3x+1) - (3x^2 - 1) = (x+1)(3x-1),$$

és így annak is, hogy $3x^2 + x - 2 = 0$.

Ennek gyökei: $x_1 = -1$, $x_2 = \dfrac{2}{3}$. Ezek kielégítik az eredeti egyenletet, tehát annak is ezek a gyökei.

Az egyenlet két oldalán szereplő függvények közös legbővebb értelmezési tartománya: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right\}$.

4. feladat. *Oldja meg a valós számok halmazán a*

$$\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \sin x + \sin 2x = \frac{1}{\cos x}$$

egyenletet!

Megoldás. A hivatalos megoldást szó szerint idézzük.

„Az egyenlet értelmezhető, ha $\cos x \neq 0$, azaz $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Mindkét oldalt $\cos x$-szel szorozva, alkalmazva a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot, kapjuk, hogy

$$\sin x \cos x + \sin 2x \cos x = 0.$$

A $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ azonosság alkalmazásával

$$\sin x\cos x + 2\sin x\cos^2 x = 0.$$

A bal oldalt szorzattá alakítva kapjuk, hogy

$$\sin x\cos x(1 + 2\cos x) = 0.$$

A szorzat csak úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, tehát

– vagy $\sin x = 0$, azaz $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

– vagy $1 + 2\cos x = 0$, azaz $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, tehát $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.

A kapott gyökök kielégítik az egyenletet, hiszen ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre."

Megjegyzés. Az eredmény helyes, de a megoldás gondolatmenete hiányos, nem veti egybe a talált gyököt az értelmezési tartománnyal. Gondoljuk végig, hogy egy kissé módosított egyenletnél ugyanezek a lépések helytelen eredményt adnak.

A módosított egyenlet:

$$\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \sin x + \sin 2x \cdot \frac{\sin x}{2\cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

A megoldásban a szöveg teljesen azonos az előzővel, csak az egyenletek módosulnak.

„Az egyenlet értelmezhető, ha $\cos x \neq 0$, azaz $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Mindkét oldalt $\cos x$-szel szorozva, alkalmazva a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot, kapjuk, hogy

$$\sin x\cos x + \sin 2x\frac{\sin x}{2} = 0.$$

A $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ azonosság alkalmazásával

$$\sin x\cos x + \sin^2 x\cos x = 0.$$

A bal oldalt szorzattá alakítva kapjuk, hogy

$$\sin x\cos x(1 + \sin x) = 0.$$

A szorzat csak úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, tehát

– vagy $\sin x = 0$, azaz $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

– vagy $1 + \sin x = 0$, azaz $\sin x = -1$, tehát $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.

A kapott gyökök kielégítik az egyenletet, hiszen ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre."

Itt a végeredmény is hibás, az indokolás pedig szó szerint van átvéve az előző bizonyításból. A példa alapján bizonyára észrevesszük a hibát. A $\cos x$-szel való beszorzás után kapott egyenlet értelmezési tartománya bővebb. A bizonyításokból nem derül ki, hogy tudatos-e a $\sin x\cos x(1+2\cos x)$, illetve a második megoldásban a $\sin x\cos x(1+\sin x)$ szorzat három tényezője közül a $\cos x$ kihagyása? Tételezzük fel, hogy a megoldás szerzője tudatosan, a kikötés miatt hagyta el azt. Ám gondolni kellett volna arra, hogy másképpen is bekerülhetnek olyan értékek, amelyek a kikötés miatt nem lehetnek gyökök, nemcsak a $\cos x = 0$ egyenlet megoldásával. A másik két tényező vizsgálata után nem elég annyit mondani, hogy „hiszen ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre", hanem ezen kívül meg kell nézni azt is, hogy a kapott értékek benne vannak-e a szűkített értelmezési tartományban! Az ekvivalens átalakításokra való hivatkozás miatt nem kell behelyettesítéssel ellenőrizni, hogy gyök-e a kapott érték, de meg kell nézni, hogy benne van-e az eredeti egyenlet értelmezési tartományában.

5. feladat (1997). *Oldja meg a valós számok halmazán a*

$$\frac{10}{x-5} + \frac{1}{y+2} = 1, \qquad \frac{25}{x-5} + \frac{3}{y+2} = 2$$

egyenletrendszert!

Megoldás. Megszorozva 3-mal az első egyenlet mindkét oldalát, és levonva ebből a második egyenlet megfelelő oldalait, azt kapjuk, hogy $\dfrac{5}{x-5} = 1$, azaz $x = 10$.

Ezt az első egyenletbe behelyettesítve: $\dfrac{10}{10-5} + \dfrac{1}{y+2} = 1$, azaz $y = -3$.

Az $(x;y)=(10;-3)$ számpár kielégíti az eredeti egyenletrendszert, tehát ez a megoldás.

Az egyenletrendszer értelmezési tartománya az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ halmaznak az a részhalmaza, amelynek $(x;y)$ elemeire $x\neq 5$, és $y\neq -2$ mindegyike teljesül:

$$D=\big\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid x\neq 5,\ y\neq -2\big\}.$$

Megjegyzés. 1. Tudomásul kell venni, hogy nincs egységes jelölésrendszer, ill. szóhasználat az egyenletrendszer megoldásainak leírására. Ha pl. két egyenletből álló egyenletrendszer adott két változóval, akkor mondják úgy is a megoldásra tett feltételeket, hogy megoldásai legyenek ilyen és olyan *számok,* de mondják úgy is, hogy megoldásai legyenek ilyen és olyan *számpárok.* Persze a hivatalos megoldásokban is mindkét szóhasználat előfordul. Sokszor a feladatban más szerepel, mint a megoldásában. Még az is előfordult, hogy egy feladat szövegében mindkettő megjelent így: „… egyenletrendszernek van legalább egy $(x;y)$ megoldása a valós számok körében.” Nem állítom, hogy értelemzavaró, de kerüljük az ilyen megfogalmazást.

Az egyenletrendszer megoldására lehetőleg a számpár, számhármas stb. szavakat és az ennek megfelelő jelölést használjunk.

Exponenciális és logaritmikus egyenletek

6. feladat (1978). *Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:*

$$6\cdot a^{5x+2}-7\cdot\sqrt{a^{8x+4}}+a^{3x+2}=0\qquad(a>0).$$

Megoldás. Mivel $\sqrt{a^{8x+4}}=a^{4x+2}$, az egyenlet bal oldalát a nyilván nullától különböző a^{3x+2} értékkel elosztva: $6\cdot a^{2x}-7\cdot a^{x}+1=0$. Ebből $a^x=1$ vagy $a^x=\dfrac{1}{6}$. Ha $a=1$, akkor x tetszőleges valós szám, ha pedig $a\neq 1$, akkor $x=0$ vagy $x=\dfrac{1}{6}$.

Ezek a számok valóban megoldásai az egyenletnek.

Megjegyzés. Sokan úgy gondolják, hogy ha $a=1$, akkor az a^x (tehát az 1^x) függvényt ne tekintsük exponenciális függvénynek. Nyilván azért, hogy minden exponenciális függvény szigorúan monoton legyen, és ekkor bizonyos megfogalmazások egyszerűbbek lesznek.

7. feladat (1991). *Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:*

$$\log_{1991}(x-3)+\log_{1992}(x-3)=3-\lg\left(x^5-24\right).$$

Megoldás. Könnyen ellenőrizhető, hogy $x=4$ megoldása az egyenletnek. Bebizonyítjuk, hogy más megoldás nincs.

Ha $x\leq 3$, akkor x biztosan nem megoldás, mert például $\log_{1991}(x-3)$-at nem értelmeztük. $3<x<4$ esetén az egyenlet bal oldala negatív, a jobb oldala pozitív, tehát nem állhat fenn egyenlőség.

Ha $x>4$, akkor az egyenlet bal oldala pozitív, a jobb oldala negatív, tehát ekkor sem állhat fenn egyenlőség.

Az egyenlet értelmezési tartománya: $D=\{x\in\mathbb{R}\mid x>3\}$.

Megjegyzés. Átalakításokkal reménytelen megkapni az $x=4$ gyököt. Ezért ez a feladat és a megoldása jó példa arra, hogy nem szabad számonkérni a megoldótól, hogy hogyan találta meg az egyenlet gyökét, de azt be kell bizonyítania (nincs előírva, hogy hogyan), hogy a talált szám megoldás, más szám pedig nem az.

8. feladat (1981). *Melyek azok az x valós számok, amelyekre az*

$$\log_x(x^2+x-4)-1$$

kifejezés értéke negatív?

Megoldás. Csak pozitív x értékek jöhetnek számításba a logaritmus alapja miatt. Teljesülni kell $x^2+x-4>0$-nak is.

Az $x^2+x-4=0$ egyenlet $x_{1,2}=\dfrac{1}{2}\big(-1\pm\sqrt{17}\big)$ gyökeinek kiszámítása után látható, hogy ez

$$x<\frac{1}{2}\big(-1-\sqrt{17}\big)\quad\text{vagy}\quad x>\frac{1}{2}\big(-1+\sqrt{17}\big)$$

esetén teljesül. A két feltétel egyszerre akkor áll fenn, ha $x>\dfrac{1}{2}\big(-1+\sqrt{17}\big)$. Így x mindenképpen nagyobb 1-nél.

Ilyen alapszám esetén a logaritmus pontosan akkor kisebb 1-nél, ha a logaritmálandó mennyiség kisebb az alapszámnál (és pozitív), tehát a mi esetünkben: ha $x^2+x-4<x$. Ez $-2<x<2$ esetén teljesül, tehát a korábbi feltétellel egybevetve adódik a feladat megoldása: $\frac{1}{2}\left(\sqrt{17}-1\right)<x<2$.

Megjegyzés. A témakör tárgyalását azzal fejezzük be, hogy felsorolunk olyan lépéseket, amelyeket alkalmazni szoktunk az ilyen feladatoknál.

• Az exponenciális és a logaritmikus egyenletek megoldása során figyelni kell az egyenletmegoldásoknál általában elmondottakra: az értelmezési tartomány vizsgálata, az egymás alá írt egyenletek kapcsolata.

• Az exponenciális egyenlet megoldásakor általában a következőképpen járhatunk el:

Egy alkalmas hatványt új ismeretlennel jelölve az egyenletet algebrai egyenletté alakítjuk. Ezt az egyenletet megoldjuk. Mivel az új ismeretlen egy hatvány volt, azonos alapú hatványok egyenlőségéből a kitevők egyenlőségére következtetve az eredeti egyenlet változójára kapunk egyszerű egyenletet.

Ennek az eljárásnak kritikus pontja, amikor azonos alapú hatványok egyenlőségéből a kitevők egyenlőségére következtetünk. Ezt ugyanis csak akkor tehetjük meg, ha az alap nem 1, nem 0, nem -1. Ha exponenciális függvénnyel fogalmazzuk meg a következtetést, akkor nem csak annyit célszerű mondani, hogy „mivel az exponenciális függvény szigorúan monoton, ezért …”, hanem konkrétan beleírni az ott szereplő alapot is, pl.: „mivel az 5 alapú exponenciális függvény szigorúan monoton, ezért …”.

• Bizonyos logaritmikus egyenletek megoldhatók úgy, ha az egyenlet két oldalán álló mennyiségeket hatványkitevőnek tekintjük és egy alkalmas alap megfelelő hatványainak egyenlőségére térünk át (természetesen mindazokra az x értékekre, amelyekre az eredeti egyenlet is érvényes volt). Itt is igaz, amit az egyenletekről mondtunk: ha van olyan x valós szám, amelyikre az eredeti egyenlet fennáll, arra az így kapott egyenlet is teljesül.

• Az exponenciális és logaritmikus egyenlőtlenségek olyan fajtájával kell csak külön foglalkoznunk, amikor a változó (az ismeretlen) eltérő szerepekben is megjelenik. Ez azt jelenti, hogy az exponenciális egyenlőtlenségben az alapban is és a kitevőben is, a logaritmikus egyenlőtlenségben a logaritmus alapjában is és a logaritmálandó mennyiségben is van változó. Az ilyen esetekben ugyanis általában nem igaz, hogy a függvény szigorúan monoton. Gondoljunk arra, hogy $\log_x x=1$. Ekkor a következtetések más módszereit kell alkalmazni.

Síkgeometria

9. feladat (1989). *Egy kör sugara* 10*, a kör* C *pontjához húzható érintő a kör* CB *húrjával* $30°$*-os szöget zár be. Számítsa ki az* ABC *kerületét és területét, ha az* AC *oldal a kör egyik átmérője!*

Megoldás. Az ABC háromszög derékszögű, $ACB\sphericalangle=60°$ miatt $CAB\sphericalangle=30°$. Ebből és $AC=20$-ból $BC=10$ és $AB=10\sqrt{3}$ következik. Az ABC háromszög kerülete:

$$AB+BC+AC=10\sqrt{3}+10+20=10\sqrt{3}+30 \quad (\approx 47,32).$$

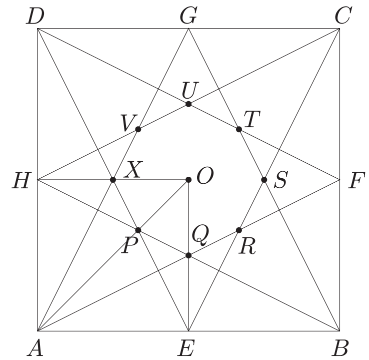
Az ABC háromszög területe: $T=\dfrac{AB\cdot CB}{2}=50\sqrt{3}$ $(\approx 86,60)$.

Megjegyzés. A közelítő értékek használata állandóan napirenden levő, kényes, tisztázatlan probléma. Az évek során legtöbbször 2, de gyakran 3 vagy 4 tizedes pontosság szerepelt az útmutatóban. Azt lehet ajánlani a diákoknak, hogy ameddig nehézség nélkül megtehető, addig a közelítő értékek nélkül számoljanak. Lehetőleg a számolások végén, befejezésül adják meg a közelítő értéket. Mérlegeljék, hogy hány tizedesjegyet érdemes leírni, és mindenképpen jelezzék, hogy közelítő értékről van szó.

A hivatalos megoldásokban gyakran előfordult, hogy a közelítő értéket a szám értékeként adták meg. Nem tartanám helyesnek, ha ennek alapján a tanár konvenciónak gondolná és azt tanítaná a diákjainak, hogy egyenlőség jelet tehetnek egy szám és a vele nem egyenlő szám, a közelítő értéke közé.

10. feladat (1989). *Egy* 10 *egység oldalú* $ABCD$ *négyzet minden csúcsát kösse össze a csúcsot nem tartalmazó két oldal felezőpontjával. E nyolc szakasz mindegyikén* 4–4 *belső metszéspont keletkezett. Ezen metszéspontok közül a* 2–2 *középső (a* P, Q, R, S, T, U, V, X *pontok) egy nyolcszöget határoznak meg. Mekkora ennek a nyolcszögnek a területe?*

Megoldás. Az *ábra* jelöléseit használjuk. A szimmetriák miatt a P metszéspont rajta van az AC átlón, és az $OXP\triangle$ területének nyolcszorosa egyenlő a keresett területtel.



A megfelelő szögek egyenlősége miatt $OXP\triangle \sim AEP\triangle$.
$2 \cdot OX = OH = AE$ miatt a hasonlósági arány $1 : 2$.
Tehát $OP = \dfrac{OA}{3} = \dfrac{5\sqrt{2}}{3}$, és így az $OXP\triangle$ területe:

$$\frac{OX \cdot OP \cdot \sin 45^\circ}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}},$$

a nyolcszög területe pedig $\dfrac{50}{3}$ ($\approx 16{,}67$) területegység.

Megjegyzés. Ez a feladat az előzővel egy példasorban volt. Az egyikben szerepelt a szakaszhossz számértéke után az egység szó, a másikban nem. Mi a feladat szövegéhez igazítottuk a megoldást.

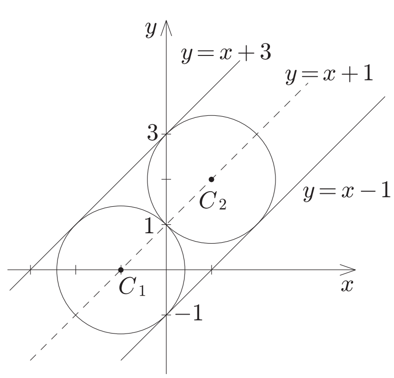
A geometriai feladatokban gyakran találunk a gyakorlati életben vagy a fizikában használatos mértékegységeket. Az egységezés szakaszkalkulusban (amikor a szakaszokkal és nem a hosszukkal végezzük a műveletet) elfogadható lenne, de a mérték (a hosszúság, a terület, a térfogat) mindig szám.

Jó lenne elgondolkodni azon, hogy tényleg ennyire lényegtelen-e, vagy reménytelen-e ennek a kérdésnek a „hivatalos" tisztázása?

Koordináta-geometria

11. feladat (1999). *Írja fel annak a körnek az egyenletét, amelyik az y tengelyt a $(0;1)$ pontban metszi, és érinti az $y = x + 3$ és az $y = x - 1$ egyenletű egyeneseket!*

Megoldás. A keresett kör középpontja egyenlő távolságra van a két egyenestől, ezért rajta van a két egyenessel párhuzamos, tőlük egyenlő távol haladó egyenesen, amelynek egyenlete $y = x + 1$. Mivel ezen az egyenesen rajta van a $(0;1)$ pont, és a kör sugara a két adott egyenes távolságának fele, azaz $\sqrt{2}$, ezért a keresett kör középpontja a $(0;1)$ pontból induló, $\sqrt{2}$ hosszúságú, az $y = x + 2$ egyenletű egyenes irányába mutató $(1;1)$ vagy $(-1;-1)$ vektor végpontjában van.



Tehát két kör tesz eleget a feltételeknek. Ezek egyenlete:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2 \quad \text{és} \quad (x+1)^2 + y^2 = 2.$$

Megjegyzés. Az egyes szám és a többes szám szerepeltetése a feladatban kérdezett mennyiség(ek), alakzat(ok) stb. esetében nem meghatározó a megoldás szempontjából. Nem szabad szó szerint értelmezni a szöveget!

Pl.: „adja meg azt a pontot ...”, és történetesen két ilyen van.

Tudatosítani kell a diákokban, hogy bár a köznapi értelmezés alapján a feladat kitűzője szerint egy ilyen pont van és azt kell a vizsgázónak megadnia, ha megtalál egy ilyen pontot, nem veheti biztosra, hogy csak egy ilyen pont van. A feladat szövege nem ad információt arról, van-e egyáltalán ilyen pont, és ha van, akkor hány van. Ezeket is a diáknak kell tisztázni, ha teljes értékű megoldást akar adni a feladatra.

Másik példa: „mely számok elégítik ki ...”, és csak egy elégíti ki.

A diák ideges, hogy hol rontotta el! Ilyen feladatszöveg esetén meg kell adnia az egyenletet kielégítő számok halmazát.

Nyilvánvaló, hogy másfajta szövegezéssel el lehetne kerülni az ilyen problémákat. Mivel nagyon sok feladatszöveg megváltoztatására úgysem kerülhet sor, és az új feladatokban is valószínűleg lesz ilyen probléma, ezért célszerű a diákot mindenre felkészíteni.

12. feladat (2000). *Bizonyítsa be, hogy a sík* $\left(\sqrt{5};\frac{1}{3}\right)$ *pontja körül írt bármely körön legfeljebb egy rácspont van (vagyis olyan pont, amelynek mindkét koordinátája egész szám)!*

Megoldás. Tegyük fel, hogy a $\left(\sqrt{5};\frac{1}{3}\right)$ középpontú valamely r sugarú körre két rácspont is illeszkedik: S és T. Akkor az ST szakasz felezőpontjának koordinátái is és az S és T pontokra illeszkedő egyenes meredeksége is racionális szám.

Ezért az ST szakasz felezőmerőlegesének egyenlete egy racionális együtthatós kétismeretlenes egyenlet:

$$ax+by=c,\quad \text{ahol}\quad a,b,c\in\mathbb{Q}.$$

A kör középpontja illeszkedik erre a felezőmerőlegesre, ezért koordinátáira

$$a\sqrt{5}+b\frac{1}{3}=c$$

teljesül. Ha $a\neq 0$, akkor ebből azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{5}=\frac{c-\frac{b}{3}}{a}.$$

Ez lehetetlen, hiszen $\sqrt{5}$ irracionális, míg a jobb oldalon álló szám racionális.

Ha $a=0$, akkor $y=\frac{1}{3}$ lenne a két rácspontot összekötő szakasz felezőmerőleges egyenesének egyenlete. Ez lehetetlen, hiszen két rácspont koordinátáinak számtani közepe nem lehet $\frac{1}{3}$.

Tehát nem illeszkedhet a $\left(\sqrt{5};\frac{1}{3}\right)$ középpontú körre két rácspont.

Megjegyzés. Ez a (hivatalos) megoldás sajnos két helyen is hiányos. Először az ST egyenes meredekségének létezését kell diszkutálni, ennek lényege a megoldás utolsó bekezdésében levő gondolat, azonban az $\frac{1}{3}$ helyett $\sqrt{5}$-re kell alkalmazni.

A másik hiány kevésbé feltűnő. Az ST szakasz felezőmerőlegesének több egyenlete is van. Ezek között vannak racionális és irracionális együtthatójúak is. A feladat megoldásához az előbbire van szükség. Ezért a megoldás e részét a következőképpen kell fogalmazni: „Ezért az ST szakasz felezőmerőlegesének van olyan egyenlete, amely racionális együtthatós kétismeretlenes egyenlet ...”