1. *Oldjuk meg a következő egyenleteket:*

$$a)\quad \frac{x^3-4x}{2-x}=0; \qquad b)\quad \sqrt{\frac{x^3-4x}{2-x}}=\frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad c)\quad \lg\frac{x^3-4x}{2-x}=0.$$

Megoldás. *a*) A nevező miatt: $x\neq 2$. A számlálót szorzattá bontjuk: $x(x-2)(x+2)$. A megoldások: $x_1=-2$ vagy $x_2=0$.

b) A nevező miatt: $x\neq 2$, a négyzetgyök miatt: $\dfrac{x^3-4x}{2-x}\geq 0$, ami az egyszerűsítés után: $-x(x+2)\geq 0$, a feladat értelmezési tartománya: $x\in[-2;0]$. A négyzetgyök alatt elvégezzük az egyszerűsítést, négyzetre emelünk, majd 0-ra rendezzük az egyenletet:

$$0=x^2+2x+\frac{3}{4}.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek két valós gyöke van: $x_1=-\dfrac{3}{2}$, $x_2=-\dfrac{1}{2}$. Mindkettő megoldása az eredeti egyenletnek is.

c) A nevező miatt: $x\neq 2$, a logaritmus miatt: $\dfrac{x^3-4x}{2-x}>0$, ami az egyszerűsítés után: $-x(x+2)>0$, a feladat értelmezési tartománya: $x\in\,]-2;0[$. Elvégezzük az egyszerűsítést, majd a logaritmus definíciója szerint kapjuk a következő egyenletet: $-x^2-2x=10^0$, azaz $0=x^2+2x+1$. Az egyenlet egyedüli megoldása: $x=-1$.

2. *Igazoljuk, hogy ha* $a+1$ *osztható* 6*-tal, akkor* n *minden egész értékére* $n(an^2+1)$ *is osztható* 6*-tal.*

Megoldás. Ha az $a+1$ osztható 6-tal, akkor a felírható $6k-1$ alakban ($k\in\mathbb{Z}$). Ekkor $n(an^2+1)=n\big[(6k-1)n^2+1\big]=6kn^3-(n-1)n(n+1)$. Az első tag 6-nak többszöröse, ezért osztható 6-tal. A második tag három egymást követő egész szám szorzata, így az is osztható 6-tal.

3. *Az* 5 cm *sugarú körbe írt* AB *húr egyenlő a körbe írható szabályos nyolcszög, a* BC *húr pedig a körbe írható szabályos hatszög oldalával. Mekkora az* AC *szakasz?*

Megoldás. Jelöljük O-val a kör középpontját. I. eset: $OBA\sphericalangle=67{,}5^\circ$, $OBC\sphericalangle=60^\circ$, és ezek összege: $ABC\sphericalangle=127{,}5^\circ$. Az OAB háromszögből koszinusztétellel meghatározzuk az AB hosszát:

$$AB=\sqrt{50-25\sqrt{2}}\approx 3{,}8268.$$

Az ABC háromszögből koszinusztétellel meghatározzuk az AC hosszát:

$$AC^2=14{,}6444+25-2\cdot 3{,}8268\cdot 5\cdot\cos 127{,}5^\circ\approx 62{,}94,\quad AC\approx 7{,}9\ \text{(cm)}.$$

II. eset: $OBA\sphericalangle=67{,}5^\circ$, $OBC\sphericalangle=60^\circ$, és ezek különbsége: $ABC\sphericalangle=7{,}5^\circ$. Az OAB háromszögből koszinusztétellel most is $AB\approx 3{,}8268$. Az ABC háromszögből koszinusztétellel meghatározzuk az AC hosszát: $AC\approx 1{,}3$ (cm).

Az AC hosszának lehetséges értékei: 7,9 cm vagy 1,3 cm.

4. *Az* a *paraméter mely értékeire van az*

$$a^2(x-1)=4(ax-x-1)$$

egyenletnek egész gyöke?

Megoldás. Az egyenlet $(a-2)^2\cdot x=a^2-4$ alakúra rendezhető.

Ha $a=2$, akkor a $0\cdot x=0$ egyenletet kapjuk, amelynek minden valós szám megoldása, ekkor van az egyenletnek egész gyöke.

Ha $a\neq 2$, akkor

$$x=\frac{(a-2)(a+2)}{(a-2)^2}=\frac{a+2}{a-2}=1+\frac{4}{a-2},$$

ez akkor egész, ha $a-2$ osztója a 4-nek. Ekkor a lehetséges értékei: -2; 0; 1; 3; 4; 6, összesen hét megfelelő a értéket kaptunk: $\{-2;0;1;2;3;4;6\}$.

5. *A* 13 *egység területű* ABC *háromszög két csúcsa:* $A(3;-1)$ *és* $B(-1;5)$*. Határozzuk meg a* C *csúcs koordinátáit úgy, hogy a háromszög kerülete minimális legyen.*

Megoldás. Az ABC háromszög c oldalának hossza a megadott koordináták segítségével kiszámítható: $c=AB=2\sqrt{13}$. Mivel a háromszög területe 13, azért $m_c=\sqrt{13}$. Az AB szakaszt az $F(1;2)$ felezőpontja körül 90°-kal elforgatva kapjuk a KL szakaszt: $K(-2;0)$, $L(4;4)$.

Az AB egyenessel párhuzamos, K-ra illeszkedő f_1, illetve L-re illeszkedő f_2 egyeneseken van a keresett háromszög C csúcsa (hiszen $FL=FK=\sqrt{13}$). Az A pont tengelyes tükörképét f_1-re jelölje A'. $AC+CB=A'C+CB$, ami akkor minimális, ha $A'B$ és f_1 metszéspontja a C csúcs. Az f_2-vel hasonlóan járhatunk el. Az így kapott metszéspontok éppen K, illetve L.

A C lehetséges koordinátái: $(-2; 0)$ vagy $(4; 4)$.

6. *Egy 60 cm kerületű téglalap két szomszédos oldalára, mint átmérőre kifelé félköröket rajzolunk. Mekkorának válasszuk a téglalap oldalhosszúságait, hogy a kapott síkidom*

a) kerülete minimális legyen;

b) területe maximális legyen?

Megoldás. A téglalap egyik oldalának a hosszát jelölje x, ekkor a másik oldal $30 - x$.

a) A síkidom kerülete x-szel kifejezve:

$$k(x) = 30 + \frac{x}{2} \cdot \pi + \frac{30 - x}{2} \cdot \pi = 30 + 15\pi.$$

A kerület így nem függ x-től, állandó.

b) A síkidom területe x-szel kifejezve:

$$t(x) = x(30 - x) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 \pi + \frac{1}{2}\left(\frac{30 - x}{2}\right)^2 \pi,$$

elvégezzük a kijelölt műveleteket:

$$t(x) = \left(\frac{\pi}{4} - 1\right) x^2 + \frac{60 - 15\pi}{2} x + \frac{225\pi}{2}.$$

Felhasználjuk, hogy ha a másodfokú függvény főegyütthatója negatív, akkor az együtthatók szokásos jelölésével az $x = -\dfrac{b}{2a}$ helyen maximuma van, ami most

$$x = -\frac{\frac{60-15\pi}{2}}{2\left(\frac{\pi}{4} - 1\right)} = \frac{15\pi - 60}{\pi - 4} = 15\text{-nek adódik.}$$

A terület tehát akkor maximális, ha a téglalap négyzet.

7. *Egy háromszög α és β szögeire*

$$(1 + \operatorname{ctg}\alpha)(1 + \operatorname{ctg}\beta) = 2 \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta.$$

Határozzuk meg a háromszög harmadik szögét.

Megoldás. Az egyenletet alakítsuk át:

$$\left(1 + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\left(1 + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right) = 2\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt $\sin\alpha\sin\beta$-val:

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin\beta + \cos\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta.$$

Végezzük el a beszorzást és rendezzük:

$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

tehát $\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta)$.

Az egyenlőség mindkét oldalát oszthatjuk $\sin(\alpha+\beta)$-val (ami nem nulla, mert $0 < \alpha+\beta < 180°$), ekkor $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = 1$. Ebből a két szög összege 45°, vagyis a harmadik szög 135°-os.

8. *Az $ABCDE$ konvex ötszög A csúcsát kössük össze a BE átló, valamint a BC, CD és DE oldalak felezőpontjával. Az így kapott négy szakaszon az A csúcstól távolabbi harmadoló pontok által meghatározott négyszög területe az eredeti ötszög területének az ötödével egyenlő. Hányadrésze az ABE háromszög területe az eredeti ötszög területének?*

Megoldás. Az A csúcstól indulva (a B felé) az oldalfelező pontok legyenek F_1, F_2, F_3, F_4 és F_5, a BE átló felezőpontja pedig F. A feladat szövege szerint a $BCDE$ négyszög F_2, F_3, F_4 és F oldalfelező pontjait kell összekötnünk az A csúccsal, majd ezt a négyszöget kell az A-ból $\dfrac{2}{3}$ arányban kicsinyítenünk. Ekkor kapjuk az $F_2'F_3'F_4'F'$ négyszöget. Megmutatható, hogy $F_2F_3F_4F$ négyszög (ami egyébként egy paralelogramma) területe fele a T területű, $BCDE$ négyszög területének. A hasonlóságból következik, hogy $F_2'F_3'F_4'F'$ területe $\dfrac{2}{9}T$. Legyen az ABE háromszög területe μT. Ekkor a feladat szövege szerint:

$$\frac{1}{5} = \frac{\frac{2}{9}T}{\mu T + T} = \frac{2}{9\mu + 9},$$

amiből $\mu = \dfrac{1}{9}$. Ez azt jelenti, hogy az ABE háromszög területe tizede az ötszög területének.