A1. Legyen az n adott pozitív egész szám. Hányféleképpen írható föl az n pozitív egészek összegeként

$$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$

alakban, ahol k tetszőleges pozitív egész úgy, hogy

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_k \le a_1 + 1?$$

Ha például $n = 4$, akkor négy ilyen felírás van: 4, $2+2$, $1+1+2$, $1+1+1+1$.

A2. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n$ nemnegatív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} + (b_1 b_2 \cdots b_n)^{\frac{1}{n}} \le \big((a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)\big)^{\frac{1}{n}}$$

A3. Határozzuk meg a

$$|\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \sec x + \operatorname{cosec} x|$$

kifejezés minimális értékét, ha x tetszőleges valós szám.

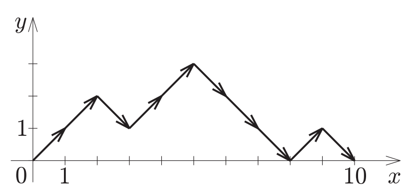
A4. Legyenek az a, b, c, A, B, C olyan valós számok, amelyekre $a \ne 0$, $A \ne 0$, továbbá minden valós x-re teljesül, hogy

$$|ax^2 + bx + c| \le |Ax^2 + Bx + C|.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$|b^2 - 4ac| \le |B^2 - 4AC|.$$

A5. Egy $2n$ hosszúságú Dyck töröttvonal az origóból indul, n darab $(1;1)$ és n darab $(1;-1)$ valamilyen sorrendben egymáshoz csatlakozó lépésből áll úgy, hogy a töröttvonalnak nincsen pontja az x-tengely alatt. Egy ilyen töröttvonalban visszatérésnek nevezzük lefelé haladó lépéseknek az x-tengelyre érkező egymáshoz csatlakozó maximális sorozatát. Az *ábrán* látható 10-hosszúságú Dyck töröttvonal például két visszatérést tartalmaz, egyikük hossza 3, a másikuké pedig 1.



Bizonyítsuk be, hogy ha n páros, akkor kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető a $2(n-1)$ hosszúságú és a visszatérés nélküli $2n$ hosszúságú Dyck töröttvonalak között.

A6. Nemnegatív egész számok egy adott S halmazára jelölje $r_S(n)$ azon $(s_1; s_2)$ rendezett párok számát, amelyekre $s_1 \in S$, $s_2 \in S$, $s_1 \ne s_2$, továbbá $s_1 + s_2 = n$. Felosztható-e a nemnegatív egész számok halmaza két részhalmazra, az A-ra és a B-re úgy, hogy minden n-re fennálljon az $r_A(n) = r_B(n)$ egyenlőség?

B1. Léteznek-e olyan $a(x)$, $b(x)$, $c(y)$, $d(y)$ polinomok, amelyekre az

$$1 + xy + x^2y^2 = a(x)c(y) + b(x)d(y)$$

egyenlőség azonosan teljesül?

B2. Legyen az n adott pozitív egész szám. Az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$ sorozatból kiindulva készítsük el az alábbi $(n-1)$-tagú sorozatot:

$$\frac{3}{4},\ \frac{5}{12},\ \ldots,\ \frac{2n-1}{2n(n-1)}.$$

Ebben a sorozatban minden egyes elem az előző sorozat két szomszédos elemének az átlaga. Ismételjük meg ezt az átlagolási eljárást a kapott sorozatra is, az így adódó $(n-2)$-tagú sorozatra szintén, és folytassuk egészen addig, amíg a kapott „sorozat” már csak egyetlen számból áll. Bizonyítsuk be, hogy ez a szám kisebb, mint $\frac{2}{n}$.

B3. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n számra

$$n! = \prod_{i=1}^{n} \mathit{lkkt}\left\{1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{i}\right]\right\}.$$

(A feladatban *„lkkt”* a legkisebb közös többszöröst, $[x]$ az x szám egész részét jelenti.)

B4. Legyen
$$f(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = a(z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)(z - r_4),$$
ahol a, b, c, d, e egész számok és $a \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy ha $r_1 + r_2$ racionális szám és $r_1 + r_2 \neq r_3 + r_4$, akkor $r_1 r_2$ racionális szám.

B5. Legyenek A, B, C egymástól egyenlő távolságra lévő pontok egy O középpontú egységnyi sugarú körvonalon és legyen P tetszőleges pont a kör belsejében. Jelölje a P távolságát az A, B, C pontoktól rendre a, b és c. Bizonyítsuk be, hogy van olyan a, b, c oldalú háromszög, amelynek a területe csak az OP távolságtól függ.

B6. Legyen $f(x)$ a $[0;1]$ intervallumon értelmezett folytonos valós értékű függvény. Bizonyítsuk be, hogy
$$\int_0^1\int_0^1 \left|f(x) + f(y)\right| dx\, dy \geq \int_0^1 \left|f(x)\right| dx.$$