

Elméleti feladatok megoldása¹

1. feladat. „Pingpong-ellenállás”

(a) Az R sugarú, egymástól d ($d \ll R$) távolságra levő kondenzátorlemezek között ható elektrosztatikus erőt két lényegesen különböző módon is kiszámolhatjuk a kondenzátorra kapcsolt V feszültség ismeretében:

i) Az egyik, például az alsó lemezre ható erő megegyezik a lemezen tárolt Q töltésnek és a másik, felső lemez által keltett E' elektromos térerősségnek a szorzatával. A kondenzátoron belüli térerősség $E = \frac{V}{d} = 2E'$, hiszen mindkét kondenzátorlemez azonos E' járulékot ad belül a térhez. Az egyes kondenzátorlemezek Q töltése a kondenzátorlemez körülvevő hengerfelületre felírt Gauss-tételből kapható meg: $Q = 2E'\varepsilon_0 R^2\pi$. Ezek alapján az alsó lemezre ható elektrosztatikus vonzóerő:

$$(1) \quad F = \varepsilon_0 \frac{V^2 R^2 \pi}{2d^2}.$$

ii) A lemezek között ható erőt megkaphatjuk energetikai megfontolások segítségével is! Tegyük föl, hogy a lemezeket a köztük ható F erő ellenében kicsiny Δd távolsággal eltávolítjuk egymástól. Minthogy a kondenzátor állandó V feszültségre van kapcsolva, és $C = \varepsilon_0 \frac{R^2\pi}{d}$ kapacitása megváltozik, töltése is megváltozik, mégpedig

$$(2) \quad \Delta Q = V(C_2 - C_1) = \varepsilon_0 V R^2 \pi \left(\frac{1}{d + \Delta d} - \frac{1}{d} \right) \approx -\varepsilon_0 V R^2 \pi \frac{\Delta d}{d^2}$$

értékkel. (A negatív előjel töltéscsökkenést jelez. A közelítésnél felhasználtuk, hogy $(1 + \alpha)^{-1} \approx 1 - \alpha$, ha $|\alpha| \ll 1$.)

A kondenzátorlemezek eltávolításakor végzett kicsiny $\Delta W = F \cdot \Delta d$ munka kétféle energiaváltozást fedez. Egyrészt a kondenzátor energiája $\Delta E_{\text{kond}} = \frac{1}{2} V \cdot \Delta Q$ értékkel változik meg, hiszen változik a rajta tárolt töltés. Másrészt a telep energiája $\Delta E_{\text{telep}} = -V \cdot \Delta Q$ értékkel változik meg, hiszen az egymáshoz képest V potenciálkülönbségű kapcsok között ΔQ töltés vándorol át. (Ha $\Delta Q > 0$, azaz a telep tölti a kondenzátort, akkor energiája csökken, ez indokolja a negatív előjelet.) Tehát a folyamatra a következő formában írható föl az energiamegmaradás tétele:

$$(3) \quad \Delta W = F \cdot \Delta d = \Delta E_{\text{kond}} + \Delta E_{\text{telep}} = -\frac{1}{2} V \cdot \Delta Q = \varepsilon_0 V^2 R^2 \pi \frac{\Delta d}{2d^2},$$

ahonnan közvetlenül adódik az előző pontban kapott (1) eredmény.

Felhívjuk a figyelmet arra az érdekes tényre, hogy annak ellenére, hogy a kondenzátorlemezek távolításakor *munkát végeztünk*, a kondenzátor energiája *csökkent*, mégpedig pontosan a végzett munkával megegyező értékkel, $\Delta W = -\Delta E_{\text{kond}}$. Ezzel szemben a telep energiája $\Delta E_{\text{telep}} = 2\Delta W$ értékkel *nőtt*, hiszen a kondenzátor „töltötte” a telepet.

(b) A kondenzátor alsó fegyverzetén fekvő r sugarú kis korong q töltése például a Gauss-tétel segítségével kapható meg. Írjuk föl a tételt egy olyan hengerfelületre, amely körbeveszi a kis korongot: $q = \varepsilon_0 E r^2 \pi = \varepsilon_0 \frac{r^2 \pi}{d} V$, ahonnan a keresett paraméter:

$$(4) \quad \chi = \varepsilon_0 \frac{r^2 \pi}{d}.$$

Kicsit szellemesebben, egyszerűbben is megkaphatjuk a keresett töltést, ha észrevesszük, hogy a fegyverzet teljes Q töltésének éppen a kis korong területére eső $\frac{r^2}{R^2}$ hányada adja meg q -t.

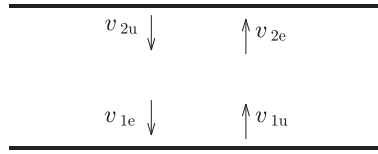
(c) A kis korong akkor emelkedik föl a fegyverzetről, ha a rá ható qE' elektrosztatikus erő megegyezik, vagy nagyobb, mint a lefelé mutató mg nehézségi erő. Hangsúlyozzuk, hogy az alsó fegyverzeten fekvő korongra ható elektrosztatikus erőt csupán a felső fegyverzet által keltett $E' = \frac{E}{2} = \frac{V}{2d}$ térből kell kiszámolnunk, hiszen az alsó fegyverzet nem fejt ki (függőleges irányú) elektrosztatikus erőt a kis korongra. Így a V_k küszöbfeszültségre az $mg = qE' = \frac{\chi V_k^2}{2d}$ egyenletből

$$(5) \quad V_k = \sqrt{\frac{2mgd}{\chi}}$$

érték adódik.

(d) Kövessük nyomon a kis korong mozgását, sebességének változását mozgásának egy periódusa alatt! Jelölje a korong sebességének nagyságát az alsó (1), ill. felső (2) fegyverzetnél közvetlenül az ütközés előtt (e) és után (u) rendre v_{1e} és v_{1u} , ill. v_{2e} és v_{2u} .

¹ A feladatok szövegét a KöMaL októberi számában közzöltük.



Az ütközési szám definíciója szerint

$$(6) \quad v_{1u} = \eta v_{1e}, \quad v_{2u} = \eta v_{2e}.$$

A két ütközés közti felfelé, illetve lefelé való mozgásra felírhatjuk a mechanikai energiamegmaradás tételét. A nehézségi erő munkájából adódó potenciális energiaváltozás $\pm mgd$, míg az elektromos tér munkája $qV = \chi V^2$. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a nehézségi erő munkája negatív a fölfelé történő mozgásnál, és pozitív a lefelé való mozgásnál. Ezzel szemben a Coulomb-erő munkája mindkét esetben pozitív, hiszen az alsó fegyverzeten q töltésre feltöltött korong a felső fegyverzeten leadja töltését, és $-q$ töltésű lesz. Ezek figyelembevételével a mozgás két szakaszára a mechanikai energiamegmaradás törvénye

$$(7) \quad \text{fel: } \frac{1}{2} m v_{2e}^2 = \frac{1}{2} m v_{1u}^2 + \chi V^2 - mgd,$$

$$(8) \quad \text{le: } \frac{1}{2} m v_{1e}^2 = \frac{1}{2} m v_{2u}^2 + \chi V^2 + mgd$$

alakban írható. A (6)–(8) egyenletek felhasználásával rendre kifejezhetjük a v_{2e} , v_{2u} és v_{1e} sebességeket a v_{1u} sebességgel:

$$(9) \quad v_{2e}^2 = v_{1u}^2 + \frac{2\chi V^2}{m} - 2gd,$$

$$(10) \quad v_{2u}^2 = \eta^2 v_{2e}^2 = \eta^2 \left(v_{1u}^2 + \frac{2\chi V^2}{m} - 2gd \right),$$

$$(11) \quad v_{1e}^2 = v_{2u}^2 + \frac{2\chi V^2}{m} + 2gd = \eta^2 v_{1u}^2 + (1 + \eta^2) \frac{2\chi V^2}{m} + (1 - \eta^2) 2gd.$$

Végül felhasználva (6) első egyenletét, valamint az utolsó, (11) összefüggést, az állandósult mozgás $v_{1u} = v_s$ sebességére a következő egyenletet kapjuk:

$$(12) \quad (1 - \eta^4) v_s^2 = \eta^2 \left((1 + \eta^2) \frac{2\chi V^2}{m} + (1 - \eta^2) 2gd \right).$$

Az egyenlet megoldása

$$(13) \quad v_s^2 = \frac{2\chi\eta^2}{m(1-\eta^2)} V^2 + \frac{2gd\eta^2}{1+\eta^2},$$

ahonnan a keresett α és β együttható értéke:

$$(14) \quad \alpha = \frac{2\chi\eta^2}{m(1-\eta^2)} \quad \text{és} \quad \beta = \frac{2gd\eta^2}{1+\eta^2}.$$

(e) Ha teljesül a $qV \gg mgd$ feltétel, akkor a kondenzátorlemezek között mozgó korongra ható elektrosztatikus erő jóval nagyobb, mint a nehézségi erő, így ez utóbbit elhanyagoljuk. Ekkor a korong mozgása szimmetrikus; az emelkedés és a süllyedés is egyenletesen gyorsuló mozgás, és a két mozgás csak irányában különbözik. Az előző pontban a sebességekre kapott kifejezések egyszerűsödnek, a (13), (9) és (6) formulák és $g = 0$ felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$(15) \quad v_{1u} = v_{2u} = \sqrt{\alpha} V, \quad v_{1e} = v_{2e} = \frac{1}{\eta} v_{1u} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\eta} V.$$

A kis korong mozgásának egyik – például az emelkedési – félperiódusában d utat tesz meg egyenletesen gyorsulva v_{1u} -ról v_{2e} sebességre, így a félperiódus ideje

$$t = \frac{2d}{v_{1u} + v_{2e}} = \frac{2d\eta}{\sqrt{\alpha}(1+\eta)V}.$$

Az átszállított töltés $q = \chi V$, tehát az állandósult állapot elérése után a kis korong által szállított áram átlagos értéke $I = \frac{q}{t}$, ahonnan a keresett γ együttható:

$$(16) \quad \gamma = \frac{\chi\sqrt{\alpha}(1+\eta)}{2d\eta} = \sqrt{\frac{\chi^3(1+\eta)}{2md^2(1-\eta)}}.$$

(f) Ebben a részfeladatban újra figyelembe kell vennünk a nehézségi erő hatását, hiszen kis feszültségértékeknél $qV \not\gg mgd$. A feszültséget csökkentve az áram akkor szűnik meg, amikor a korong sebessége olyan kicsinnyé válik, hogy az már nem emelkedik fel a felső fegyverzetig. A V_c kritikus feszültség mellett a korong éppen $v_{2e} = 0$ sebességgel éri el a felső lapot. A (9) és (13) összefüggéseket felhasználva a

$$(17) \quad 0 = \frac{2\chi\eta^2}{m(1-\eta^2)}V_c^2 + \frac{2gd\eta^2}{1+\eta^2} + \frac{2\chi}{m}V_c^2 - 2gd$$

egyenletet kapjuk a kritikus feszültségre, melynek megoldása:

$$(18) \quad V_c = \sqrt{\frac{mgd(1-\eta^2)}{\chi(1+\eta^2)}} = V_k \sqrt{\frac{1-\eta^2}{2(1+\eta^2)}}.$$

Az I_c kritikus áram mellett a kis korong éppen eléri a felső fegyverzetet, azaz $v_{2e} = v_{2u} = 0$, és lezajlik a töltéscsere – hiszen folyik áram –, tehát a korongra ható Coulomb-erő iránya, és így az eredő erő nagysága is megváltozik a felső holtpontra. A kritikus áram mellett (18) és (13) felhasználásával a v_{1u} és v_{1e} sebességekre azt kapjuk, hogy

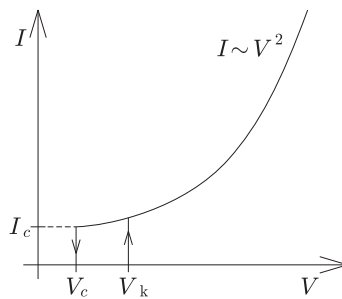
$$(19) \quad v_{1u,c} = 2\eta\sqrt{\frac{gd}{1+\eta^2}}, \quad v_{1e,c} = \frac{v_{1u,c}}{\eta} = 2\sqrt{\frac{gd}{1+\eta^2}}.$$

A korong nulla vég-, ill. kezdősebességű egyenletesen lassuló, ill. gyorsuló mozgást végez az emelkedési, ill. süllyedési szakaszon, azonban e két mozgás időtartama nem azonos. A (19) sebességek ismeretében az emelkedés, ill. süllyedés időtartama

$$(20) \quad t_{\uparrow} = \frac{2d}{v_{1u,c}} = \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{d(1+\eta^2)}{g}}, \quad t_{\downarrow} = \frac{2d}{v_{1e,c}} = \sqrt{\frac{d(1+\eta^2)}{g}},$$

és egy teljes periódus alatt átszállított töltés $2\chi V_c$, tehát a kritikus áram:

$$(21) \quad I_c = \frac{2\chi V_c}{t_{\uparrow} + t_{\downarrow}} = \frac{2\eta g}{1+\eta^2} \sqrt{m\chi \frac{1-\eta}{1+\eta}}.$$



Mint hogy $0 < \eta < 1$, a (18) egyenletből látszik, hogy a stacionárius mozgás fenntartásához szükséges V_c feszültség kisebb, mint a korong felemeléséhez szükséges V_k feszültség, tehát az áram–feszültség karakterisztikának *hiszterézise* van. Például $\eta = 0,6$ értékű ütközési szám esetén $V_c \approx 0,485 \cdot V_k$. Az *ábra* vázlatosan mutatja a rendszer karakterisztikáját és a hiszterézist.

2. feladat. Felemelkedő ballon

(a) Felhasználva az ideális gáz állapotegyenletét, n mól hélium gáz térfogata $p + \Delta p$ nyomáson és T hőmérsékleten

$$V = \frac{nRT}{p + \Delta p},$$

míg n' mól levegő térfogata p nyomáson és T hőmérsékleten

$$V = \frac{n'RT}{p}.$$

Így a ballon kiszorít $n' = n \frac{p}{p + \Delta p}$ mól levegőt, melynek súlya $M_{\text{lev}} n' g$. A kiszorított levegő súlya megegyezik a felhajtóerővel, azaz

$$F_{\text{fel}} = M_{\text{lev}} n g \frac{p}{p + \Delta p}.$$

(b) A z magasságkülönbségből származó nyomásváltozás $-\rho g z$, ha a levegő ρ sűrűsége állandó. Ha a sűrűség a magasság függvényeként változik, akkor a következő egyenletet használhatjuk:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{\rho_0 T_0}{p_0} \frac{p}{T} g,$$

ahol az egyesített gáztörvényt $\frac{\rho T}{p} = \text{állandó}$ alakban használtuk. Ha ebbe az egyenletbe behelyettesítjük a feladatban megadott $p(z) = p_0(1 - z/z_0)^\eta$ összefüggést, illetve a $T(z) = T_0(1 - z/z_0)$ függvényt, akkor a deriválás elvégzése után a keresett η kitevőt így fejezhetjük ki:

$$\eta = \frac{\rho_0 z_0 g}{p_0} = \frac{1,16 \cdot 4,9 \cdot 10^4 \cdot 9,8}{1,01 \cdot 10^5} = 5,52.$$

A kérdéses kitevő számértéke tehát két értékes jegy pontossággal: 5,5.

(c) Amikor Δp nyomáskülönbség mellett a ballon sugarát r -ről $(r + dr)$ -re növeljük, akkor a rugalmas megnyújtáshoz szükséges munka

$$dW = 4\pi r^2 \Delta p dr,$$

míg ugyanekkora r sugár mellett a rugalmas energia növekményét a feladatban megadott $U = 4\pi r_0^2 \kappa RT \left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3\right)$ energia függvény deriválásával határozhatjuk meg:

$$dW = \left(\frac{dU}{dr}\right) dr = 4\pi \kappa RT \left(4r - 4\frac{r_0^6}{r^5}\right) dr.$$

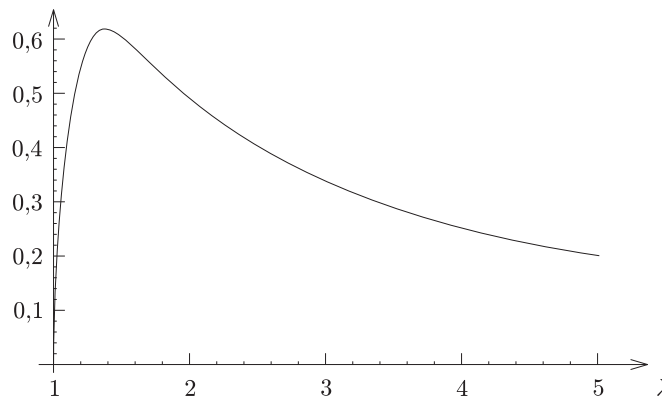
A munkavégzés kétféle kifejezésének egyenlővé tételével kaphatjuk meg a kívánt választ:

$$\Delta p = 4\kappa RT \left(\frac{1}{r} - \frac{r_0^6}{r^7}\right) = \frac{4\kappa RT}{r_0} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7}\right).$$

A nyomáskülönbség grafikon λ (>1) függvényében kezdetben élesen növekszik, $\lambda = 7^{1/6} = 1,38$ értéknél maximumot vesz fel, majd nagy λ értékeknél λ^{-1} szerint csökken. A következő ábrán a dimenziótlan

$$\frac{\Delta p}{\frac{4\kappa RT}{r_0}} = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7}\right)$$

kifejezés ábrázolása látható:



(d) Írjuk fel az ideális gáz állapotegyenletét: $p_0 V_0 = n_0 R T_0$, ahol V_0 a feszítetlen falú ballon térfogatát jelenti. Az n mól gázt tartalmazó ballon belső nyomása $V = \lambda^3 V_0$ térfogat mellett $T = T_0$ hőmérsékleten:

$$p_{\text{belső}} = \frac{n R T_0}{V} = \frac{n}{n_0 \lambda^3} p_0.$$

Másrészt a ballon belső nyomását a (c) alkérdésre megadott többletnyomás segítségével is kifejezhetjük $T = T_0$ hőmérsékleten:

$$p_{\text{belső}} = p_0 + \Delta p = p_0 + \frac{4\kappa R T_0}{r_0} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7}\right) = \left[1 + a \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7}\right)\right] p_0.$$

A belső nyomás fenti két kifejezését egyenlővé téve határozhatjuk meg az a „ballonparamétert”:

$$a = \frac{\frac{n}{n_0\lambda^3} - 1}{\lambda^{-1} - \lambda^{-7}}.$$

A megadott $n/n_0 = 3,6$ és $\lambda = 1,5$ numerikus adatokat behelyettesítve, a ballonparaméterre $a = 0,11$ adódik.

(e) Az (a) alkérdésben levezetett felhajtóerő egyensúlyt tart az $M_{\text{teljes}} = 1,12$ kg tömegre ható nehézségi erővel, ami a következő összefüggésre vezet:

$$\frac{p}{p + \Delta p} = \frac{M_{\text{teljes}}}{M_{\text{lev}} \cdot n}.$$

Másrészről, ha a $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \lambda^3 \frac{4}{3}\pi r_0^3 = \lambda^3 V_0$ térfogatú ballon belsejében lévő héliumra újra alkalmazzuk az ideális gáz állapotegyenletét, akkor tetszőleges külső p nyomás és T hőmérséklet esetén a ballonban lévő n mól héliumra felírhatjuk:

$$(p + \Delta p)\lambda^3 = \frac{nRT}{V_0} = p_0 \frac{T}{T_0} \frac{n}{n_0}.$$

Ha a fenti két összefüggés mellett felhasználjuk a (c) alkérdésben a nyomáskülönbségre megkapott formulát, akkor meghatározhatjuk a három ismeretlen mennyiséget, vagyis p , Δp és λ értékét mint a T hőmérséklet és egyéb adatok függvényét.

A fenti két összefüggés összevetéséből a felhajtóerő-súly egyensúlyra egy újabb feltételt kapunk:

$$\frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} \lambda^3 = \frac{M_{\text{teljes}}}{M_{\text{lev}} \cdot n_0}.$$

Ezek után használjuk fel a (c) alkérdésben a nyomáskülönbségre megkapott formulát és az ideális gázegyenletből kapott összefüggést:

$$p\lambda^3 + \frac{4\kappa RT}{r_0} \lambda^2(1 - \lambda^{-6}) = p_0 \frac{T}{T_0} \frac{n}{n_0},$$

illetve ezt átrendezve és felhasználva a korábban bevezetett a „ballonparamétert”:

$$\frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} \lambda^3 = \frac{n}{n_0} - a\lambda^2(1 - \lambda^{-6}).$$

Így az előzőleg a felhajtóerő-súly egyensúlyra kapott feltétellel megegyező bal oldalú összefüggésre jutottunk. A jobb oldalak egyenlővé tételével olyan egyenlethez juthatunk, amely már csak a λ lineáris méretnövekedési arányt tartalmazza:

$$\lambda^2(1 - \lambda^{-6}) = \frac{1}{an_0} \left(n - \frac{M_{\text{teljes}}}{M_{\text{lev}}} \right) = 4,54.$$

Az egyenlet megoldása akkor egyszerű, ha közelítést (belátható, hogy nagyon jó közelítést) használunk:

$$\lambda^2 \approx \frac{4,54}{1 - 4,54^{-3}} \approx 4,54 \quad \rightarrow \quad \lambda_f \cong 2,13.$$

A ballon maximális emelkedési magasságát úgy kaphatjuk meg, ha a felhajtóerő-súly egyensúlyra kapott feltételben $\left(\frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} \right)$ helyére beírjuk a nyomás és a hőmérséklet magasságfüggését, amit a (b) alkérdésben ismerhettünk meg:

$$\frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} \lambda_f^3 = \left(1 - \frac{z_f}{z_0} \right)^{\eta-1} \lambda_f^3 = \frac{M_{\text{teljes}}}{M_{\text{lev}} \cdot n_0} = 3,10.$$

Felhasználva, hogy $\lambda_f = 2,13$ és $(\eta - 1) = 4,5$, a ballon maximális emelkedési magasságára

$$z_f = (49 \text{ km}) \cdot \left(1 - \left[\frac{3,10}{2,13^3} \right]^{\frac{1}{4,5}} \right) = 10,9 \text{ km}.$$

A ballon tehát mintegy 11 km magasságra emelkedik, és lineáris mérete $\lambda_f = 2,1$ -szeresére növekszik.

3. feladat. Atomi erő mikroszkóp

(a) A $z(t) = A \sin(\omega t - \Phi)$ függvényt behelyettesítve a szinuszos gerjesztéssel csillapított kényszerrezgést leíró $m\ddot{z} + b\dot{z} + m\omega_0^2 z = F_0 \sin(\omega t)$ egyenletbe, és $\sin(\omega t - \Phi)$ -re, $\cos(\omega t - \Phi)$ -re alkalmazva az addíciós azonosságokat, rendezés után azt kapjuk, hogy:

$$(1) \quad \overbrace{(bA\omega \sin \Phi + mA(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \Phi - F_0)}^0 \sin(\omega t) + \underbrace{(-mA(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \Phi + bA\omega \cos \Phi)}_0 \cos(\omega t) = 0.$$

Ez az egyenlet csak úgy állhat fenn minden t időpillanatban, ha mindkét kapocscsal jelölt kifejezés zérus. Ebből az A amplitúdóra valamint a Φ fázis tangensére a

$$(2) \quad \operatorname{tg} \Phi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad A = \frac{F_0}{\sqrt{b^2\omega^2 + m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

megoldás adódik. Speciálisan az $\omega = \omega_0$ „rezonanciafrekvencián”:

$$(3) \quad \Phi = \frac{\pi}{2}, \quad A = \frac{F_0}{b\omega_0}.$$

Megjegyezzük, hogy a *rezonanciafrekvencia* szó itt kicsit félrevezető, ugyanis (2) második összefüggése szerint nem zérus csillapítás mellett ($b > 0$) az $A(\omega)$ amplitúdó a maximumát nem ω_0 , hanem $\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{b^2}{2m^2\omega_0^2}}$ értéknél veszi fel. Azonban a feladatban szereplő $\omega_0 \gg \frac{b}{m} > 0$ feltevés mellett, azaz kis csillapításnál $\omega_{\max} \approx \omega_0$, ezért a feladat további részében is „rezonanciafrekvencián” kicsit pongyolán a gerjesztés és csillapítás nélkül létrejövő rezgés ω_0 frekvenciáját értjük.

(b) A $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ azonosság felhasználásával a lock-in erősítőben létrejövő szorzat jel a következő alakban írható:

$$(4) \quad \begin{aligned} V_i V_R &= V_{i0} \sin(\omega_i t - \Phi_i) V_{R0} \sin(\omega t) = \\ &= \frac{V_{i0} V_{R0}}{2} \left(\cos[(\omega_i - \omega)t - \Phi_i] - \cos[(\omega_i + \omega)t - \Phi_i] \right). \end{aligned}$$

Általában mindkét koszinusz függvény időátlagja nulla. A szorzat jelnek csak az $\omega_i = \omega$ speciális esetben van egyenfeszültségű komponense, ugyanis ekkor az első koszinusz függvény argumentuma független az időtől. Ekkor a kimenő jel egyenfeszültségű komponense:

$$(5) \quad \frac{V_{i0} V_{R0}}{2} \cos \Phi_i.$$

Megjegyezzük, hogy a fenti számolás rávilágít a lock-in erősítési technika lényegére. Tegyük fel ugyanis, hogy a V_i bemenő jelet nagy, esetleg magánál a V_{i0} jelamplitúdónál is nagyobb véletlen zaj terheli. Hagyományos módon ekkor nem tudnánk kiszűrni a mérendő jelet a háttérzajból. Azonban a lock-in detektor kimenetén a véletlen zaj nulla időátlagú jelet ad, úgy, ahogy $\omega_i \neq \omega$ esetén is zérus a kimeneti jel időátlagja. Pontosabban, a zajt is, mint ahogy minden más jelet, fel lehet bontani különböző frekvenciájú szinuszos jelek összegére (ezt hívják Fourier-analízisnek). A lock-in detektor egy igen erősen szelektív frekvenciaszűrőként működik, a referencia jel ω frekvenciájának egy nagyon szűk környékén átengedi a jelet, míg minden más frekvenciájú Fourier-komponenst elnyom. Így a zaj nagy része nem jelenik meg a kimeneten, míg az ω frekvenciájú jel zavartalanul átjut a lock-in erősítőn.

(c) Az (a) pont (3) eredménye szerint az ω_0 rezonanciafrekvencián az érzékelő kar kitérése $\pi/2$ fázissal késik a gerjesztéshez képest. Így az $F = c_1 V'_R = c_1 V_{R0} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ gerjesztés hatására a fotoérzékelő kimenő jele $V_i = c_2 z = c_1 c_2 \frac{V_{R0}}{b\omega_0} \sin(\omega t)$ alakú, azaz azonos fázisban van a $V_R = V_{R0} \sin(\omega t)$ referencia jellel. Így az (5) formulában $\Phi_i = 0$, tehát a lock-in erősítő egyenáramú kimenő jele:

$$(6) \quad \frac{V_{i0} V_{R0}}{2} \cos 0 = c_1 c_2 \frac{V_{R0}^2}{2b\omega_0}.$$

(d) A Δm tömegváltozás hatására az új rezonanciafrekvencia

$$(7) \quad \sqrt{\frac{k}{m}} \left(1 + \frac{\Delta m}{m}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\Delta m}{2m}\right), \quad \text{tehát} \quad \Delta\omega_0 = -\omega_0 \frac{\Delta m}{2m}.$$

A rezonanciafrekvencia és a tömegváltozás hatására (2) első egyenletének értelmében a gerjesztés és a kialakult kényszerrezgés közti Φ fázis is megváltozik. Kezdetben (a tömegváltozás előtt) a rendszer $\omega = \omega_0$ rezonanciafrekvencián működött, és a fázistolás értéke $\Phi = \pi/2$ volt. A tömeg megváltozása nem befolyásolja az $\omega = \omega_0$ gerjesztési frekvenciát, azonban a fázis, a tömeg, ill. a rezonanciafrekvencia a $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2} + \Delta\phi$, $m \rightarrow m + \Delta m$, ill. $\omega_0 \rightarrow \omega_0 + \Delta\omega_0$ formulának megfelelően eltolódik. Ezeket a helyettesítéseket elvégezve (2) első egyenletében, és $\Delta\Phi$, ill. Δm kicsiny értékei mellett alkalmas közelítést használva

$$(8) \quad \underbrace{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\Phi\right)}_{\approx -1/\Delta\Phi} = b\omega_0 / \underbrace{\left([m + \Delta m][(\omega_0 + \Delta\omega_0)^2 - \omega_0^2]\right)}_{\approx -\Delta m \omega_0^2},$$

adódik, ahonnan a fáziseltolódásból még éppen kimutatható tömegváltozás:

$$(9) \quad \Delta m = \frac{\Delta \Phi b}{\omega_0} = \frac{b}{m} \cdot \frac{m^{\frac{3}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}} \cdot \Delta \Phi = 10^3 \cdot 10^{-18} \cdot \frac{\pi}{1800} \text{ kg} = 1,7 \cdot 10^{-18} \text{ kg}.$$

(e) Mivel a minta által kifejtett $f(h) \approx f(h_0) + c_3(h - h_0)$ erő is lineárisan függ a kar elmozdulásától, csakúgy, mint a rugóerő, a két erő eredője egy új, k' rugóállandójú effektív rugóerőnek tekinthető, és ez határozza meg az új rezonanciafrekvenciát. Pontosabban a h_0 egyensúlyi helyzettől mért $z = h - h_0$ kitérésre a következő mozgásegyenlet írható fel:

$$(10) \quad m\ddot{z} + b\dot{z} + m\omega_0^2 z = F_0 \sin(\omega t) + c_3 z.$$

(Az új egyensúlyi helyzetben az $f(h_0)$ konstans kiesik az egyenletből.)

Látható, hogy az új effektív rugóállandó $k' = m\omega_0^2 - c_3$, így az új rezonanciafrekvencia:

$$(11) \quad \omega'_0 = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{c_3}{m\omega_0^2}}, \quad \text{és} \quad \Delta\omega_0 = \omega'_0 - \omega_0 \approx -\frac{c_3}{2m\omega_0}.$$

(f) A maximális frekvenciaeltolódás akkor jön létre, amikor a mikroszkóp érzékelő tője éppen a csapdázott elektron fölött van. Ekkor a minta és a kar közti Coulomb-erő $f(h) = k_e \frac{qQ}{h^2}$. Feltéve, hogy a kar rezgésének amplitúdója jóval kisebb, mint a két töltés d_0 távolsága, az $f(h)$ függvényt linearizálhatjuk az egyensúlyi helyzet körül. A meredekségre a

$$(12) \quad c_3 = \left. \frac{df}{dh} \right|_{h=d_0} = -2k_e \frac{qQ}{d_0^3}$$

érték adódik, ahonnan (11) felhasználásával a frekvenciaeltolódás $\Delta\omega_0 \approx \frac{k_e qQ}{m\omega_0 d_0^3}$. Innen a keresett távolság az adatok behelyettesítésével:

$$(13) \quad d_0 = \sqrt[3]{\frac{k_e qQ}{m\omega_0 \Delta\omega_0}} = 4,1 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 41 \text{ nm}.$$

Az 1985-ben G. Binnig, C. F. Quate és Ch. Gerber által felfedezett atomi erő mikroszkóp² (*Atomic Force Microscope*, AFM) két tekintetben is a pásztázó alagútmikroszkóp (Scanning Tunneling Microscope, STM) kishúgának tekinthető: egyrészt a két berendezés felfedezői részben azonosak³; másrészt, a két berendezés működési elvének is vannak hasonló vonásai. Mindkét eszközben egy nagyon kisméretű, éles hegyű tűt mozgatnak a minta fölött, soronként pásztázva végig a minta felszínét. Mindkét berendezés alkalmas atomi méretű mintázatok detektálására. Az STM-ben a mért jel a tű és a minta között folyó áram ingadozása, míg az AFM-ben a tűre ható mechanikai erő finom változásait érzékeli. Így az atomi erő mikroszkóp lényegében úgy tapogatja le a minta felszínét, mint ahogy a régi lemezjátszók tője érzékeli a hangjeleket tartalmazó mikrobarázdákat a bakelit hanglemezen.

A fenti feladat az AFM egy fejlettebb változatának elvi működéséhez kapcsolódik; az érzékelő tű nem kerül direkt kontaktusba a minta felszínével, hanem ahhoz nagyon közel gerjesztett rezgőmozgást végez, és a rezgés fázisának a minta hatására bekövetkező eltolódását detektálják.

Az AFM technikának több jelentős előnye is van a néhány évvel korábban felfedezett STM-mel szemben: a mintát nem kell légüres térbe helyezni, vizsgálhatók levegőben, vagy folyadék alatt levő minták is; a mintának nem kell elektromos vezetőnek lennie; a vizsgálat kevésbé roncsoló hatású, így vizsgálhatók lágyabb minták, például biológiai szövetek is.

A kísérleti feladat megoldása

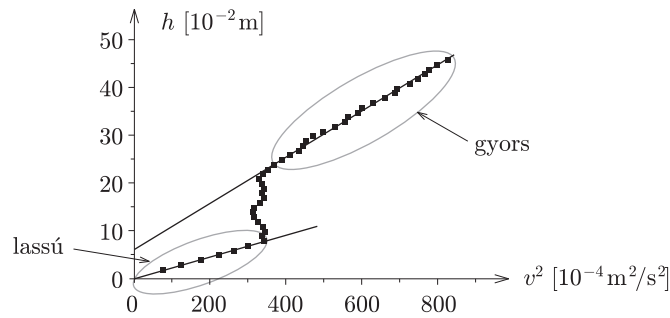
A feladatban egy úgynevezett „mechanikai fekete doboz” fizikai paramétereit kellett meghatározni. A „mechanikai fekete doboz” egy lezárt csőből állt, melyben egy golyó helyezkedett el. A golyó két rugó segítségével a cső két végéhez volt erősítve. A feladat lényegében az volt, hogy meg kellett mérni a golyó tömegét és a két rugóállandót (természetesen a lezárt cső felnyitása nélkül).

Mérleggel határozhatjuk meg a cső-golyó rendszer együttes tömegét. Vízszintes helyzetben a csövet kiegyensúlyozva (kétoldalú emelőként használva), megkaphatjuk a cső-golyó rendszer tömegközéppontját (hány centiméterre van a cső közepétől). Egyszerű forgatónyomaték egyensúlyból kiszámíthatjuk a golyó tömegének és a cső középpontjától mért távolságának a szorzatát. Ezzel túljutunk az első részfeladaton.

A golyó tömegének meghatározásához a csövet forgóasztalra kell tenni, melyet egy csigán átvett fonálhoz rögzített test segítségével hozhatunk forgásba. Ha a test függőleges elmozdulását ábrázoljuk a test sebesség-négyzetének a függvényében, akkor a következő grafikonhoz juthatunk:

² *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 930–933 (1986).

³ A pásztázó alagútmikroszkópot G. Binnig és H. Rohrer fedezte föl 1981-ben; felfedezésükért 1986-ban Nobel-díjat kaptak.



Az ábrán három szakaszt különböztethetünk meg: a lassú, az átmeneti és a gyors szakaszt. Lassú mozgáskor a tapadási súrlódás megakadályozza a golyó elmozdulását a csőben, az átmeneti szakaszban a golyó fokozatosan kijebb csúszik, a gyors mozgáskor viszont a cső végénél megakad. A grafikon alapján megállapíthatjuk, hogy a lassú forgás tartományában h egyenesen arányos v^2 -tel ($h = Cv^2$), míg a gyors forgás tartományában $h = Av^2 + B$ egyenlettel írható le. Az A , B és C együtthatók mérhetőek.

A forgó mozgás energetikai leírásával olyan egyenletekhez juthatunk, melyek segítségével az A , B és C együtthatók meghatározhatók, illetve az előző részben megkapott tömeg-távolság szorzat segítségével a golyó tömege is kiszámítható.

A rugóállandókat úgy kaphatjuk meg, ha a „mechanikai fekete dobozt”, vagyis a csövet előbb egyik, majd másik végénél felfüggesztjük, és fizikai ingaként lengetjük. Megmutatható, hogy a golyó vízszintes egyensúlyi helyzetéből történő elmozdulása ugyanakkora, akármelyik vége körül lengetjük a csövet. A mért lengésidőkből ez az elmozdulás, majd ebből a két rugó úgynevezett effektív rugóállandója meghatározható.

A két rugóállandót külön-külön úgy számíthatjuk ki, ha figyelembe vesszük az effektív rugóállandót, továbbá azt is, hogy az előző vizsgálatok nyomán már kiszámíthatjuk a golyó pontos egyensúlyi helyét a cső vízszintes helyzetében.

Összefoglalásképpen érdemes megemlítenünk, hogy ez a feladat mérés technikailag nem volt könnyű, szokatlan volt a digitális óra használata, önállóan kellett létrehozni az egyes elrendezéseket, ám ezek a mérési nehézségek eltörpültek a feladat által megkívánt igen szövevényes elméleti számítások okozta gondokhoz képest.