I. rész

1. *Oldjuk meg az*

$$x \cdot \left(\frac{x-3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}(x-2)(x+2) = \frac{1+(x-1)^3}{9}$$

egyenletet.

Megoldás. Azonos átalakítások és az egyenlet rendezése után elsőfokú egyenletet kapunk. Megoldása: $x = 2$.

2. *Egy kockával 6-szor dobunk egymás után és feljegyezzük az eredményeket.*
a) Hányféle sorozat jöhet létre?
b) Hányféle sorozat jöhet létre, ha az első helyen és csak ezen áll 1-es?
c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első helyen a többitől különböző szám áll?

Megoldás. *a*) Az összes eset: $6^6 = 46\,656$.

b) Az első hely kötött, itt van az 1-es. A következő öt hely mindegyikén az öt szám bármelyike állhat, azaz $5^5 = 3125$ eset van.

c) A kedvező esetek száma az előző megfontolást követve: $6 \cdot 5^5$. Így a kérdéses valószínűség:

$$P = \frac{6 \cdot 5^5}{6^6} = \frac{5^5}{6^5} \approx 0{,}402.$$

3. *Egy matematika tanár akkor mondja, hogy szerencsésen állította össze a dolgozatot, ha a jegyek átlaga e és π között van ($e = 2{,}718\ldots$ és $\pi = 3{,}141\ldots$). Egy 35 fős osztályból a legjobb gyerek munkáját még nem nézte meg, és ekkor az átlag 2,68 volt. Hogyan sikerülhetett a legjobb tanuló dolgozata, ha a tanár elmondhatta magáról, hogy szerencsésen állította össze a dolgozatot?*

Megoldás. Mivel a 34 gyerek dolgozatának átlaga 2,68 és ez kerekített érték, azért a jegyeik S összege

$$2{,}675 \cdot 34 = 90{,}95 \le S < 2{,}685 \cdot 34 = 91{,}29.$$

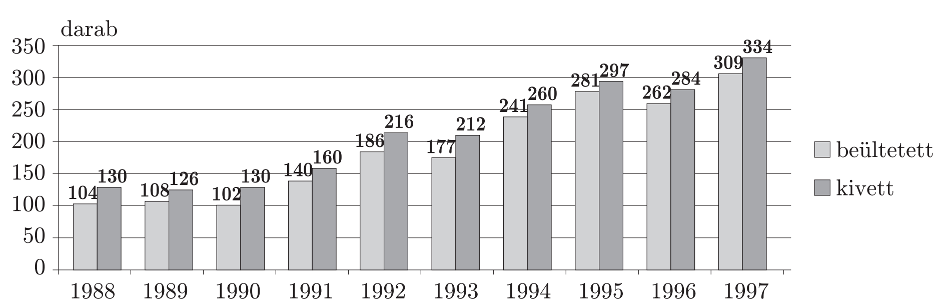
A jegyek összege tehát 91. Legyen a legjobb tanuló osztályzata n, ahol n lehetséges értékei: 1, 2, 3, 4, 5. A megoldandó egyenlőtlenség:

$$2{,}718 \le \frac{91+n}{35} \le 3{,}141,$$

amelynek az öt lehetséges érték közül csak az $n = 5$ tesz eleget.

A legjobb tanuló 5-ös dolgozatot írt; az átlag ebben az esetben 2,74 volt.

4. *Tekintsük a következő diagramot. Egy 10 éves periódusban a beültetett és a kivett vesék darabszámát olvashatjuk le róla.*



a) Melyik évben ültették be a legnagyobb százalékban a kivett veséket?
b) Ábrázoljuk az első és az utolsó három évben a beültetett és a kivett vesék arányát.
c) Levonható-e valamilyen következtetés a kapott ábráról?

Megoldás. *a*) Készítsük el a következő táblázatot:

1988.	1989.	1990.	1991.	1992.	1993.	1994.	1995.	1996.	1997.
80%	85,7%	78,5%	87,5%	86,1%	83,5%	92,7%	94,6%	92,3%	92,5%

A táblázat mutatja, hogy 1995-ben ültették be a legnagyobb százalékban a kivett veséket.

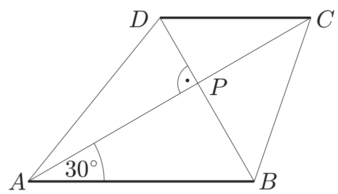
b) Ha a függőleges tengely beosztását tized pontossággal készítjük el, akkor a kért évekhez tartozó 0,8; 0,86; 0,79 és 0,95; 0,92; 0,93 arányokat például oszlopdiagramon tudjuk ábrázolni.

c) Látható, hogy az arány a vizsgált időszak utolsó három évében magasabb, mint az első három évben volt. (Valószínű, hogy fejlődött a kivételhez és a kivett vesék szállításához, eltartásához szükséges műszerezettsége a kórházaknak.)

II. rész

5. *Egy trapéz egyik átlója 30°-os szöget zár be az alappal. A két átló merőleges egymásra.*
a) Milyen hosszú a két átló, ha az alapok 6 és 4 egység hosszúak?
b) Mekkora a trapéz területe?
c) Számítsuk ki a trapéz kerületét.

Megoldás. Készítsünk vázlatrajzot.



a) $BAC\sphericalangle = DCA\sphericalangle$, mert váltószögek, így a $PAB\triangle$ és a $PCD\triangle$ is olyan derékszögű háromszög, amelynek van 30°-os és 60°-os szöge, ezért a két háromszög oldalainak a hossza meghatározható: $BP = 3$, $AP = 3\sqrt{3}$, illetve $DP = 2$, $CP = 2\sqrt{3}$. Vagyis $AC = 5\sqrt{3}$, $BD = 5$.

b) Mivel az átlók merőlegesek egymásra, azért a trapéz területe a szorzatuk felével egyenlő:

$$t = \frac{5 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = \frac{25}{2}\sqrt{3} \approx 21{,}65 \text{ (területegység).}$$

c) A kerület kiszámításához határozzuk meg a szárak hosszát! Használjuk a Pitagorasz tételt:

$$AD = \sqrt{AP^2 + DP^2} = \sqrt{31} \approx 5{,}57, \quad BC = \sqrt{BP^2 + CP^2} = \sqrt{21} \approx 4{,}58.$$

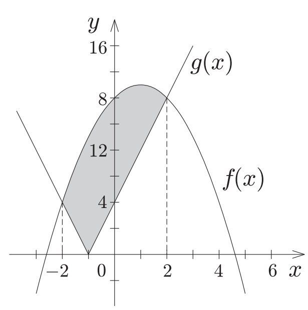
A trapéz kerülete: $k \approx 6 + 4{,}58 + 4 + 5{,}57 = 20{,}15$ (egység).

6. *Tekintsük a valós számokon értelmezett*

$$f(x) = 13 - (x-1)^2 \quad \textit{és} \quad g(x) = 4|x+1|$$

függvényeket.
a) Oldjuk meg az $f(x) \geq g(x)$ egyenlőtlenséget grafikusan.
b) Mekkora területű az $f(x)$ és a $g(x)$ görbéje által határolt síkidom?

Megoldás. *a)* Az ábrázolás után a megoldás leolvasható: $-2 \leq x \leq 2$.



b) Az $f(x)$ görbéje alatti terület meghatározása:

$$\int_{-2}^{2} \left[13 - (x-1)^2\right] dx = \int_{-2}^{2} (-x^2 + 2x + 12)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 12x\right]_{-2}^{2} =$$

$$= -\frac{8}{3} + 4 + 24 - \frac{8}{3} - 4 + 24 = \frac{128}{3}.$$

A $g(x)$ görbéje alatti terület meghatározásakor két derékszögű háromszög területösszegének kiszámítására van szükségünk: $\frac{1 \cdot 4}{2} + \frac{3 \cdot 12}{2} = 20$.

A keresett síkidom területe: $\frac{128}{3} - 20 = \frac{68}{3}$ (területegység).

7. *Bizonyítsuk be, hogy az*

$$5x^2 - 2(5k+3)x + 5k^2 + 6k + 1 = 0$$

egyenlet gyökeinek különbsége k minden értékére ugyanakkora.

Megoldás. Írjuk fel a megoldóképletet:

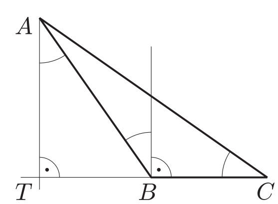
$$x_{1,2} = \frac{2(5k+3) \pm \sqrt{4(5k+3)^2 - 20(5k^2+6k+1)}}{10}.$$

A diszkrimináns értéke 16, így $x_1 = k+1$; $x_2 = k + 0{,}2$.

A két gyök különbsége minden k esetén 0,8.

8. *Az ABC háromszögben $\beta - \gamma = 90°$. Bizonyítsuk be, hogy az A csúcsból induló magasság egyenese a háromszög köré írható körének érintője is egyben.*

Megoldás. Készítsünk vázlatrajzot.



A feladat szövege alapján megállapítható, hogy az *ábrán* jelölt egyíves szögek egyenlők, mindhárom γ. Ha tekintjük a háromszög körülírt körét, akkor az AB ív szempontjából a C-nél lévő szög kerületi szög, a $TAB\sphericalangle$ pedig érintő szárú kerületi szög. Az ABC háromszög AT magassága tehát a háromszög köré írható körnek az érintője is.

9. *Válasszuk ki az* 50 cm *kerületű, egyenlő szárú háromszögek közül azt, amelyben minimális az oldalakra rajzolható négyzetek területösszege.*

Megoldás. Jelöljük a szárak hosszát b-vel, ekkor az alap $a = 50 - 2b$.

A kérdéses terület: $t(b) = 2b^2 + (50-2b)^2$. Ennek a másodfokú függvénynek minimuma van. A $t(b) = 6b^2 - 200b + 2500$ függvény minimumhelye: $\frac{200}{2 \cdot 6} = \frac{50}{3}$.

A keresett egyenlő szárú háromszög az a szabályos háromszög, melynek oldala $\frac{50}{3}$ egység.